الحلول الكاملة لكتيب ثاني وثالث ثانوي 2021

11-12 Student 2021

إخراج اللجنة العلمية

أ هادي غروي أ طارق فضل

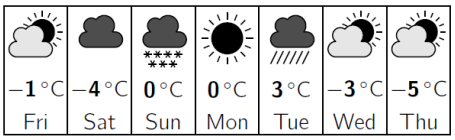
د عبد العزيز بن عبيد

إشراف

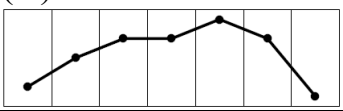
أ صفوت الطنابي

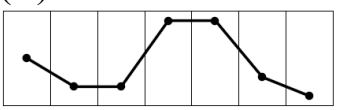
مسائل الثلاث نقاط	3 points

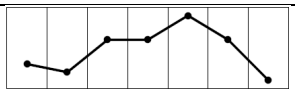
1- يُظهر تطبيق الطقس على جوال باسل الشكل التالي للأجواء المتوقعة ودرجة الحرارة العظمى للأيام السبعة القادمة. أي من الرسوم البيانية التالية يمثل درجات الحرارة العظمى للأيام السبعة القادمة؟

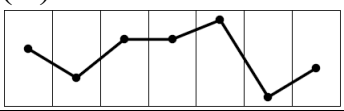


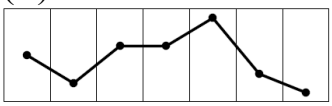
1- Basel's weather app shows a diagram of the predicted weather and maximum temperatures for the next seven days, as shown. Which of the following represents the corresponding graph of maximum temperature?

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


إجابة السؤال الأول (E)

الحل: نلاحظ التغير في درجات الحرارة للأيام المتوالية. نلاحظ أنه في اليوم الثاني انخفضت درجة الحرارة عن اليوم الأول وبالتالي نستبعد الرسم A. في اليوم الثالث ارتفعت درجة الحرارة عن اليومين الثاني واليوم الأول أيضا وبالتالي نستبعد الخيار B. اليوم الثالث والرابع لهما نفس درجة الحرارة لكنها ارتفعت في اليوم الخامس وهذا متحقق في جميع الرسوم المتبقية. نلاحظ انخفاض كبير في درجة الحرارة في اليوم السادس حتى عن اليوم الثالث والرابع وبالتالي نستبعد الخيار C. أخيرا في اليوم السابع انخفضت درجة الحرارة عن اليوم السادس وهذا يجعلنا نستبعد الخيار D. إذا الخيار الصحيح هو E.

2- كم عدد الأعداد الصحيحة في الفترة $(20-\sqrt{21},20+\sqrt{21})$ **؟**

2- How many integer numbers are in the interval $(20-\sqrt{21},20+\sqrt{21})$?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
9	10	11	12	13

إجابة السؤال الثاني (A)

الحل: بملاحظة أن الفترتين $(-\sqrt{21},\sqrt{21})$ **و** $(20-\sqrt{21},20+\sqrt{21})$ **بهما نفس عدد الأعداد الصحيحة، وتفسير ذلك أن الفترة الثانية تعتبر إزاحة للفترة الأولى بمقدار** 20 **وحدة على خط الأعداد، وبالتالي لا يمكن أن يختلف طول المسافة الصحيحة الأكبر داخل أي من الفترتين.**

العدد 21 **يقع بين العددين المربعين** $16,25$ **وبالتالي** $4<\sqrt{21}<5$ **. إذن عدد الأعداد الصحيحة الموجبة بين** 0 **و** $\sqrt{21}$ **هو أربعة أعداد، وبالمثل هناك أربعة أعداد صحيحة سالبة بين** 0 **و** $-\sqrt{21}$ **، وبالإضافة لوجود الصفر في الفترة** $(-\sqrt{21},\sqrt{21})$ **. إذن عدد الأعداد الصحيحة في الفترة** $(-\sqrt{21},\sqrt{21})$ **هو تسعة أعداد. وهو نفس عدد الأعداد الصحيحة في الفترة** $(20-\sqrt{21},20+\sqrt{21})$ **.**

حل آخر: ليكن $x\in(20-\sqrt{21},20+\sqrt{21})$ **حيث** x **عدد حقيقي.**

إذن $x>20-\sqrt{21}>20-5$ **، ومنها** $x>15$ **.**

أيضًا $x<20+\sqrt{21}<20+5$ **، ومنها** $x<25$ **.**

إذن $15<x<25$ **. إذن الأعداد الصحيحة في تلك الفترة هي** $16,17,...,24$ **، وعددها** 9 **.**

3- تم تقسيم مكعب طول حرفه يساوي 1 إلى جزأين متطابقين كل منهما متوازي مستطيلات. ما المساحة الكلية لسطح أحد هذين الجزأين؟

3- A cube with edge 1 is cut into two identical cuboids. What is the surface area of one of these cuboids?

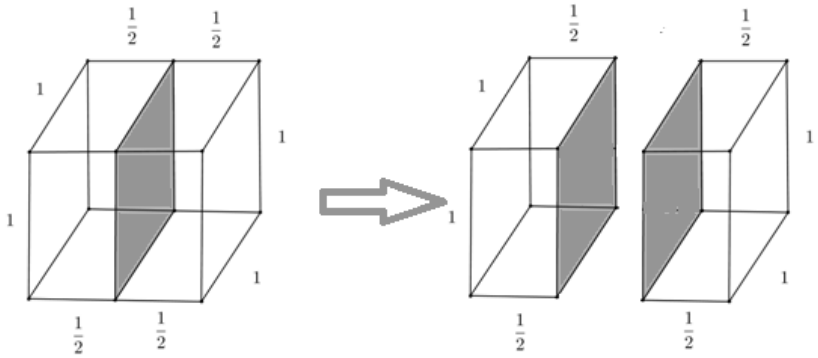
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$\frac{3}{2}$	2	3	4	5

إجابة السؤال الثالث (D)

الحل: إذا قسمنا المكعب إلى جزأين كل منهما متوازي مستطيلات فإن أبعاد أي منهما ستكون $1,1,\frac{1}{2}$ **(انظر الشكل التالي). ومن ثم يصبح كل متوازي مستطيلات به وجهان متطابقان بعدي أي منهما** $1,1$ **وأربع أوجه متطابقة بعدي أي منهم** $1,\frac{1}{2}$ **. وبمراعاة أن الجزء الواحد عبارة عن متوازي المستطيلات مساحته الكلية تساوي مجموع مساحات أوجهه الستة،**

إذن المساحة الكلية للجزء تساوي:

$$A = 2(1\times 1) + 4(1\times \frac{1}{2}) = 4$$

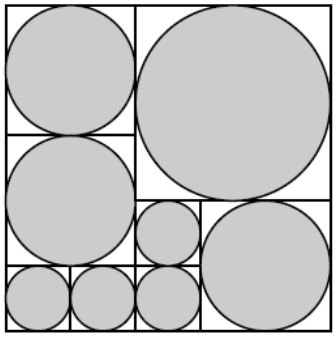


حل آخر:

المساحة الكلية للمكعب = 6 **، وعند القص يحدث زيادة في المساحة الكلية بمقدار مساحتي مربعين، أي أن المساحة الكلية للجزأين =** 8 **، وبالتالي مساحة الجزء الواحد =** 4 **.**

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

4- تم تقسيم مربع كبير إلى مربعات أصغر، كما في الشكل. وتم رسم دائرة مظللة داخل كل مربع صغير. ما نسبة المساحة المظللة إلى مساحة المربع الكبير؟



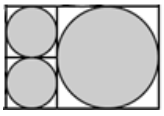
4- A large square is divided into smaller squares, as shown. A shaded circle is inscribed inside each of the smaller squares. What proportion of the area of the large square is shaded?

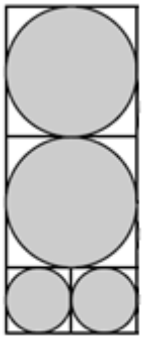
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$\frac{8\pi}{9}$	$\frac{13\pi}{16}$	$\frac{3}{\pi}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{\pi}{4}$

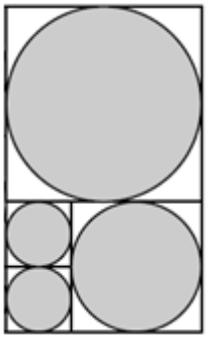
إجابة السؤال الرابع (E)

الحل: يمكنك استنتاج أن الدائرة التي تمس أضلاع مربع من الداخل يكون طول قطرها يساوي طول ضلع المربع.

دون فقدان للعمومية نفرض أن طول قطر الدائرة في الركن الأيسر السفلي **هو 2، وهي الدائرة الصغرى في الشكل.**

الآن من مستطيل الركن الأيمن السفلي  **نجد قطر الدائرة في الركن الأيمن السفلي 4، وهي الدائرة الوسطى.**

ومن المستطيل الأيسر الكبير  **نجد ضلع المربع الكبير يساوي** $10 = 2 + 4 + 4$.



ومن المستطيل الأيمن الكبير نجد طول قطر الدائرة الكبرى هو $10-4=6$.

إذن أطوال أنصاف أقطار الدائرة الصغرى والوسطى والكبرى هي 1 و 2 و 3 على الترتيب.

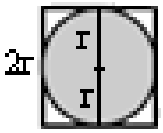
إذن مساحة الجزء المظلل يساوي مجموع مساحات الدوائر يساوي:

$$4(1^2\pi)+3(2^2\pi)+(3^2\pi)=(4+12+9)\pi=25\pi$$

،مساحة المربع تساوي 100.

إذن نسبة مساحة الجزء المظلل من الشكل تساوي $\frac{25\pi}{100}=\frac{\pi}{4}$.

حل آخر:



إذا رُسمت دائرة طول نصف قطرها r تمس أضلاع مربع من الداخل فإن النسبة بين مساحة الدائرة إلى مساحة المربع تساوي

$$\frac{\pi r^2}{4r^2}=\frac{\pi}{4}.$$

مما يعني مساحة تلك الدائرة تساوي مساحة ذلك المربع ضرب $\frac{\pi}{4}$.

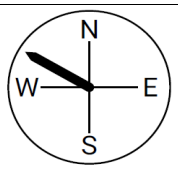
إذن في الشكل المعطى في السؤال نجد؛ مساحة الجزء المظلل يساوي مجموع مساحات الدوائر، يساوي مجموع مساحات مربعات تلك الدوائر مضروبًا في $\frac{\pi}{4}$ يساوي مساحة المربع الكبير مضروبًا في $\frac{\pi}{4}$.

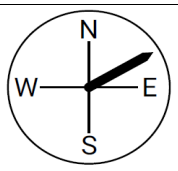
(لاحظ مربعات الدوائر تمثل تجزيئًا للمربع الكبير، وبالتالي مجموع مساحتها يساوي مساحة المربع الكبير).

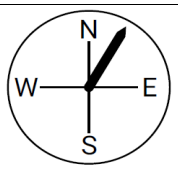
@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

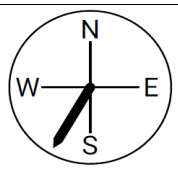
5– مالت سارية العلم على مبنى المدرسة بعد ليلة عاصفة يوم أمس. إذا نظرت من ناحية الشمال الغربي ترى أن قمة السارية على يمين قاعدتها. وإذا نظرت من ناحية الشرق ترى أن قمة السارية على يمين قاعدتها أيضاً. في أي اتجاه مالت السارية؟

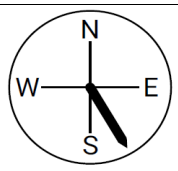
5- After the storm last night, the flagpole on our school building is leaning over. Looking from northwest, its tip is to the right of its bottom point. Looking from the east, its tip is also to the right of its bottom point. In which direction could the flagpole be leaning over?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

إجابة السؤال الخامس (A)

الحل: في كل من الأشكال في الخيارات يمكن اعتبار الخط الأسود السميك يمثل اتجاه ميل السارية، حيث نقطة الأصل للاتجاهات هي قاعدة السارية، والنقطة الأخرى هي قمة السارية. لو نظرنا للخيار (A) كما في الشكل:

نجد قمة السارية النقطة الزرقاء، وقاعدتها النقطة الصفراء. لو نظرنا من اتجاه الشرق (أي من أي نقطة على الخط الأحمر)، سنجد النقطة الزرقاء على يمين النقطة الصفراء، وكذلك لو نظرنا من اتجاه الشمال الغربي (أي من أي نقطة على الخط الأخضر)، سنجد النقطة الزرقاء أيضًا على يمين النقطة الصفراء. إذن الخيار (A) صحيح.

يمكنك التأكد بنفسك أن الخيارات الأخرى كلها خاطئة.

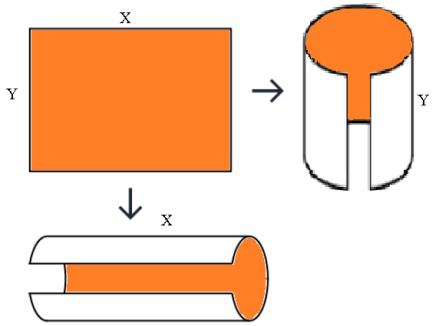
6– قطعة ورق على شكل مستطيل طوله x وعرضه y، حيث $x > y$. تم طي الورقة لتكون السطح الجانبي لأسطوانة بطريقتين مختلفتين. ما نسبة حجم الأسطوانة الأطول إلى حجم الأسطوانة الأقصر؟

6- A rectangular sheet of paper has length x and width y, where $x > y$. The rectangle may be folded to form the curved surface of a circular cylinder in two different ways. What is the ratio of the volume of the longer cylinder to the volume of the shorter cylinder?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$y^2 : x^2$	$y : x$	$1 : 1$	$x : y$	$x^2 : y^2$

إجابة السؤال السادس (B)

الحل:



الأسطوانة الطويلة: ارتفاعها x ومحيط قاعدتها y. إذن نصف قطر القاعدة $\frac{y}{2\pi}$ وبالتالي حجمها

$$x(\frac{y}{2\pi})^2\pi = \frac{xy^2}{4\pi}$$

الأسطوانة القصيرة: ارتفاعها y ومحيط قاعدتها x. إذا نصف قطر القاعدة $\frac{x}{2\pi}$ وبالتالي حجمها

$$y(\frac{x}{2\pi})^2\pi = \frac{x^2y}{4\pi}$$

إذا النسبة المطلوبة $\frac{xy^2}{4\pi} : \frac{x^2y}{4\pi} = y : x$.

(لاحظ: الاسطوانة التي طول نصف قطر قاعدتها r، وارتفاعها h يكون محيط قاعدتها $2\pi r$، حجمها $\pi r^2 h$).

7- لتكن $x = \frac{\pi}{4}$. أي الأعداد التالية أكبر؟

7- Let $x = \frac{\pi}{4}$. Which of the following numbers is the largest?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
x^4	x^2	x	$\sqrt{x}$	$\sqrt[4]{x}$

إجابة السؤال السابع (E)

الحل:

القيمة التقريبية للعدد $\pi \simeq 3.14$ **، إذن** $x = \frac{\pi}{4} \simeq \frac{3.14}{4} < 1$.

وبالتالي في العدد x^n **كلما كبُر الأُس (العدد** n **) كلما قل الناتج وأيضًا كلما صغر الأُس كبر الناتج.**

وأقل أُس هو $\frac{1}{4}$ **وبالتالي** $\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ **هو الأكبر.**

(لاحظ استخدمنا خواص الدالة الأسية $f(x) = a^x$ **، عندما** $0 < a < 1$ **تسمى دالة اضمحلال، وهي دالة تناقصية، بمعنى إذا كان** $x_1 < x_2$ **فإن** $f(x_1) > f(x_2)$ **).**

8– كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من ثلاث خانات الممكن تكوينها من الأرقام $1,3,5$ فقط وتقبل القسمة على 3؟ (يمكن استخدام الرقم الواحد أكثر من مرة).

8- How many 3-digit-numbers formed using only the digits $1,3$ and 5 are di visible by 3? You may use digits more than once.

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
3	6	9	18	27

إجابة السؤال الثامن (C)

الحل: كل عدد مطلوب تكوينه يتكون من ثلاث خانات، ولأن العدد المطلوب يقبل القسمة على 3، فإن مجموع أرقام خاناته يقبل على 3.

إذن لدينا عدة حالات لاختيار أرقام الخانات الثلاث:

أولاً: أن تكون أرقام الخانات متساوية: لدينا ثلاثة أعداد من هذا النوع $111,333,555$.

ثانياً: أن تكون أرقام خاناته كلها مختلفة: مع ملاحظة أن مجموع الأعداد $1,3,5$ يقبل القسمة على 3.

ويكون لدينا $3! = 6$ عددًا، لأنها تباديل الأرقام $1,3,5$ على الخانات الثلاث.

ثالثاً: أن يتساوى رقمان فقط: لكن هذا النوع من الأعداد لن يقبل القسمة على 3 في السؤال.

إذن عدد الأعداد المطلوبة يساوي $3 + 6 = 9$.

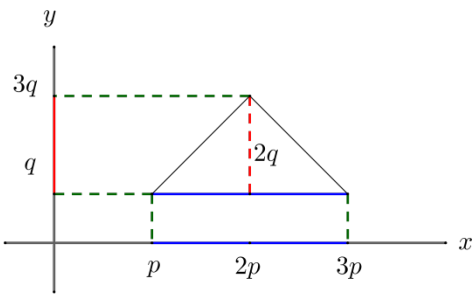
9– ما مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه هي $(p,q),(3p,q),(2p,3q)$ **حيث** $p,q>0$.

9- What is the area of the triangle whose vertices are at $(p,q),(3p,q)$ and $(2p,3q)$, where $p,q>0$?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$\frac{pq}{2}$	pq	$2pq$	$3pq$	$4pq$

إجابة السؤال التاسع (C)

الحل:



نرسم النقاط الثلاث في المستوى الإحداثي. ومن الشكل الموضح نجد أحد أضلاع المثلث أفقي، وطوله يساوي $3p-p=2p$. **إذا اعتبرناه قاعدة للمثلث فإن ارتفاع المثلث الساقط عليه سيكون** $3q-q=2q$.

بما أن مساحة المثلث تساوي نصف ضرب القاعدة ضرب الارتفاع، إذن مساحة المثلث المطلوب تساوي:

$$\frac{1}{2}\times 2p\times 2q=2pq .$$

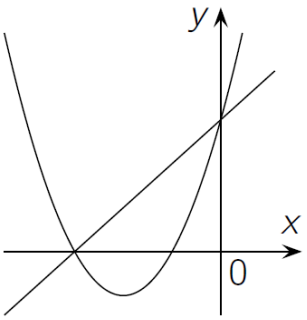
حل آخر: يمكن حل هذا السؤال عن طريق المحددات كالتالي:

مساحة المثلث تساوي

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & p & q\\ 1 & 3p & q\\ 1 & 2p & 3q\end{vmatrix}=\frac{1}{2}[(9pq-2pq)-(3pq-2pq)+(pq-3pq)]=\frac{1}{2}[4pq]=2pq$$

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

10- في الرسم التالي قطع مكافئ معادلته $y = ax^2 + bx + c$ حيث a, b, c أعداد حقيقية مختلفة. أي المعادلات التالية قد تكون معادلة المستقيم الممثل في هذا الرسم؟



The parabola in the figure has an equation of the form $y = ax^2 + bx + c$ for some distinct real numbers a, b and c. Which of the following equations could be an equation of the line in the figure?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$y = bx + c$	$y = cx + b$	$y = ax + b$	$y = ax + c$	$y = cx + a$

إجابة السؤال العاشر (D)

الحل: بما أن فتحة القطع للأعلى إذن $a > 0$. وأيضا من الرسم القطع يقطع المحور السيني في نقطتين، إحداثيهما السيني جذري المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$. أيضًا القطع يقطع المحور الصادي في نقطة $(0, c)$ و $c > 0$.

النقطة $(0, c)$ لا تحقق كل من معادلات الخيارات B, C, E، لذا نستبعد تلك الخيارات.

ندرس الخيار A: إذا كانت معادلة المستقيم $y = bx + c$، بوضع $y = 0$ نجد $x = \frac{-c}{b}$. إذن المستقيم يمر بالنقطة $(\frac{-c}{b}, 0)$، والتي سيمر بها القطع المكافئ أيضًا (معطى في الرسم المستقيم يقطع محور x في نقطة تقع على القطع المكافئ). بالتالي ينتج بالتعويض في معادلة القطع بتلك النقطة أن $\frac{ac^2}{b^2} - c + c = 0$، ومنها $ac^2 = 0$ وهذا غير ممكن لأن $a = 0$ تحول القطع المكافئ إلى مستقيم ، $c = 0$ تجعل القطع يمر بنقطة الأصل وهذا يناقض الرسم المعطى.

بقي الخيار D. لابد أن يكون الخيار الصحيح.

تعليق: يمكنك التأكد بمناقشة مشابهة للخيار A، ستحتاج تختبر هل $x = \frac{-c}{a}$ جذر للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$، ولن تجد معها تناقض، بل ستجد معها $a = c - b$، وبالتالي $x = -1$ هو الجذر الثاني.

مسائل الأربع النقاط 4 points

11- ما نسبة القواسم الموجبة الفردية للعدد $7!$ من كل قواسمه الموجبة؟

11- What proportion of all the positive divisors of $7!$ is odd?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$

إجابة السؤال الحادي عشر (D)

الحل: بتحليل العدد $7!$ إلى عوامله الأولية نحصل على: $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

إذن أي قاسم للعدد $7!$ سيكون على الصورة $2^m \cdot 3^n \cdot 5^l \cdot 7^k$ **حيث** $0 \le m \le 4, 0 \le n \le 2, 0 \le l, k \le 1$.

إذن عدد القواسم الموجبة للعدد هو عدد طرق اختيار قيم m,n,l,k، يساوي

$(4+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 60$ **قاسمًا.**

(لاحظ عدد طرق اختيار m هو 5 طرق، لأنها تأخذ القيم $0,1,2,3,4$، وعدد طرق اختيار n هو 3، وهكذا).

لكي يكون القاسم فردي لابد أن تكون قوة العدد 2 تساوي صفر.

إذن عدد القواسم الموجبة الفردية يساوي $1(2+1)(1+1)(1+1) = 12$.

وبالتالي نسبة القواسم الفردية من كل القواسم ستكون $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$.

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

12- إذا كانت $A=(0,1)\cup(2,3)$ **و** $B=(1,2)\cup(3,4)$ **. ما مجموعة كل الأعداد التي على الصورة** $a+b$ **حيث** a **عنصر في** A **و** b **عنصر في** B **؟**

12- If $A=(0,1)\cup(2,3)$ and $B=(1,2)\cup(3,4)$. What is the set of all numbers of the form $a+b$ with a in A and b in B?

(A) $(1,7)$	(B) $(1,5)\cup(5,7)$	(C) $(1,3)\cup(3,7)$
(D) $(1,3)\cup(3,5)\cup(5,7)$	(E) none of the previous لا يوجد خيار صحيح	

إجابة السؤال الثاني عشر (D)

الحل: لنأخذ أربع حالات.

الأولى: إذا كان $a\in(0,1) and\, b\in(1,2)$ **فإن** $1<b<2$ and $0<a<1$ **وبالتالي** $1<a+b<3$ **أي** $a+b\in(1,3)$.

بالمثل

الثانية: إذا كان $a\in(0,1) and\, b\in(3,4)$ **فإن** $a+b\in(3,5)$.

الثالثة: إذا كان $a\in(2,3) and\, b\in(1,2)$ **فإن** $a+b\in(3,5)$.

الرابعة: إذا كان $a\in(2,3) and\, b\in(3,4)$ **فإن** $a+b\in(5,7)$.

وبالتالي المجموعة المطلوبة هي اتحاد الفترات الناتجة.

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

13- كم عدد صحيح موجب مكون من ثلاث خانات له الخاصية التالية: عند كتابة أرقام خاناته بعكس ترتيبها تكون النتيجة عدد مكون من ثلاث خانات أكبر من العدد الأصلي بـ99؟

13- How many three-digit natural numbers have the property that when their digits are written in reverse order, the result is a three-digit number which is 99 more than the original number?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
8	64	72	80	81

إجابة السؤال الثالث عشر (D)

الحل: ليكن العدد الذي يحقق الخاصية على الصورة $\overline{abc}$. إذن يحقق $\overline{abc}+99=\overline{cba}$. وبالتالي:

$$100a+10b+c+99=100c+10b+a \Leftrightarrow 99=99c-99a \Leftrightarrow c-a=1$$

ولأن كل من الرقمين a,c يمثل خانة مئات، فكلاهما يأخذ القيم الصحيحة من 1 إلى 9 فقط. ولكن لا يمكن أن يأخذ a القيمة 9 لأن ذلك يقتضي أن $c=10$ وهذا غير ممكن. إذن يوجد 8 قيم ممكنة للعددين a,c. ويبقى b له 10 قيم.

إذن عدد الأعداد الممكنة يساوي $8\times10=80$ عددًا.

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

14- تم كتابة أول 1000 عدد صحيح موجب في صف بجانب بعض وبترتيب عشوائي. بعد ذلك تم حساب مجموع كل ثلاثة أعداد متجاورة. ما أكبر عدد من المجاميع الفردية التي يمكن الحصول عليها؟

14- The first 1000 positive integers are written in a row in some order and all sums of any three adjacent numbers are calculated. What is the greatest number of odd sums that can be obtained?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
997	996	995	994	993

إجابة السؤال الرابع عشر (A)

الحل: عدد الأعداد الفردية = عدد الأعداد الزوجية = 500 عدد.

نعلم أن حاصل جمع ثلاثة أعداد يكون فرديًا في حالتين: الأولى أن تكون كلها أعداد فردية والثانية أن عدد واحد فقط فردي.

أيضًا إذا صففنا الأعداد في صف وقمنا بجمع أي ثلاثة أعداد متجاورة سنحصل على 998 مجموع.

هدفنا الحصول على أكبر عدد ممكن من الأعداد الفردية وبالتالي سنرتبها على الصورة التالية

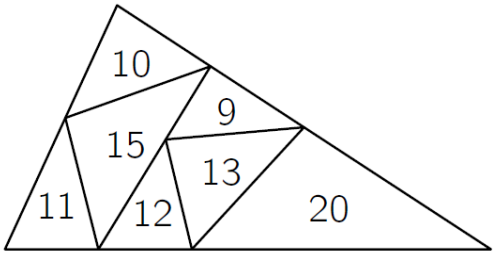
$$\underbrace{O,E,E,O,E,E,O,E,E,\ldots,O,E,E}_{250\ times\ (O,E,E)},\underbrace{O,O,\ldots,O}_{250\ times}$$

لاحظ أننا أولًا صففنا 750 عددًا بالترتيب O,E,E ، ثم وضعنا بقية الأعداد الفردية في نهاية الصف. بهذا الترتيب سوف نحصل على مجموع زوجي واحد فقط للأعداد الحمراء كما في الصورة التالية

$$\underbrace{O,E,E,O,E,E,O,E,E,\ldots,O,E,E}_{250\ times\ (O,E,E)},\underbrace{O,O,\ldots,O}_{250\ times}$$

وبقية المجاميع ستكون مجاميع فردية، وذلك لأن مجموع أي ثلاثة أعداد متجاورة من المجموعة الأولى سيكون فرديًا لأنه جمع عددين زوجيين مع عدد فردي، ومجموع أي ثلاثة أعداد متجاورة من المجموعة الثانية سيكون فرديًا أيضا لأنه حاصل جمع ثلاثة أعداد فردية. وبذلك عدد المجاميع الفردية يساوي $998-1=997$.

15– تم تقسيم مثلث كبير الى عدد من المثلثات الصغيرة، كما في الشكل. العدد المكتوب داخل أي مثلث صغير هو قيمة محيطه. ما محيط المثلث الكبير؟

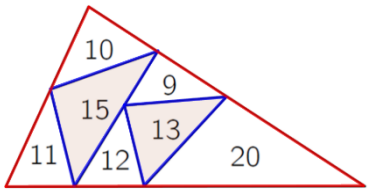


15- A large triangle is divided into smaller triangles as shown. The number inside each small triangle indicates its perimeter. What is the perimeter of the large triangle?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
31	34	41	62	None of the previous لا يوجد خيار صحيح

إجابة السؤال الخامس عشر (B)

الحل:



المطلوب هو مجموع أطوال القطع الحمراء. نلاحظ أن بجمع جميع المحيطات للمثلثات الصغيرة نحصل على المقدار 90. وفي ذلك المجموع تم حساب طول كل قطعة زرقاء مرتين، بينما يجب ألا نحسب طول أي قطعة زرقاء.

وبالتالي مجموع القطع الحمراء يساوي مجموع جميع محيطات المثلثات الصغيرة – 2 مجموع المثلثات الزرقاء يساوي $90 - 2(13 + 15) = 90 - 56 = 34$ ، وهو محيط المثلث الكبير.

16- لأي عدد صحيح N نعرف $p(N)$ بأنه حاصل ضرب أرقام خانات العدد N عندما يكون العدد مكتوب في النظام العشري. مثلاً $p(23)=2\times 3=6$. ما قيمة المقدار

$$p(10)+p(11)+p(12)+\cdots+p(99)+p(100)\text{ ؟}$$

16- For a positive integer N, we denote by $p(N)$ the product of the digits of N when written in decimal form. For example, $p(23)=2\times 3=6$. What is the value of the sum $p(10)+p(11)+p(12)+\cdots+p(99)+p(100)$?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
2025	4500	5005	5050	None of the previous لا يوجد خيار صحيح

إجابة السؤال السادس عشر (A)

الحل: بطريقة بسيطة نجزئ المجموع إلى 10 مجموعات كما يلي:

تسع مجموعات على الصورة $p(\overline{a0})+p(\overline{a1})+\cdots+p(\overline{a9})$ حيث $1\le a\le 9$، وسنعتبر $p(100)$ المجموعة العاشرة.

بتطبيق التعريف للدالة $p(N)$ فإن

$$\begin{aligned}p(\overline{a0})+p(\overline{a1})+\cdots+p(\overline{a9}) &= a\cdot 0+a\cdot 1+\cdots+a\cdot 9\\ &= a(0+1+2+\cdots+9)\\ &= a\left(\frac{9\cdot 10}{2}\right)=45a\end{aligned}$$

وبالتالي فإن المجموع المطلوب يساوي

$$\begin{aligned}p(10)+p(11)+p(12)+\cdots+p(99)+p(100) &= 1\cdot 45+2\cdot 45+\cdots+9\cdot 45+0\\ &= 45(1+2+\cdots+9)=45^2=2025\end{aligned}$$

17- تم كتابة أعداد في شبكة مربعات 5×5 بحيث يتساوى مجموع الأعداد في كل صف ومجموع الأعداد في كل عمود. يوجد عدد في كل خلية لكن بعض الأعداد لا تظهر في الشكل. ما العدد في الخلية ذات علامة الاستفهام؟

	16		22	
20		21		2
	25		1	
24		5		6
	4		?	

17- In the 5×5 square shown the sum of the numbers in each row and in each column is the same. There is a number in every cell, but some of the numbers are not shown. What is the number in the cell marked with a question mark?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
9	10	12	18	23

إجابة السؤال السابع عشر (B)

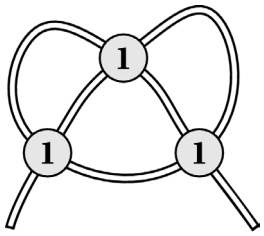
الحل: لنفرض الأعداد كما يلي وسنركز على الصفين الثاني والرابع من فوق إلى تحت والعمودين الثاني والرابع من اليسار إلى اليمين

	16		22	
20	a_1	21	a_2	2
	25		1	
24	a_3	5	a_4	6
	4		x	

بجمع الصفين وجمع العمودين المذكورين أعلاه نحصل على قيمة x كما يلي:

$$(20+a_1+21+a_2+2)+(24+a_3+5+a_4+6)=(16+a_1+25+a_3+4)+(22+a_2+1+a_4+x)$$
$$\Rightarrow 78=68+x \Rightarrow x=10$$

18- تم وضع قطعة حبل على الطاولة. وتم تغطية جزء منه بقطع نقدية كما في الشكل. تحت كل قطعة معدنية التقاء أجزاء الحبل يكون هكذا ⤫ أو هكذا ⤫. إذا سحبنا طرفي الحبل ما احتمال الحصول على عُقدة؟



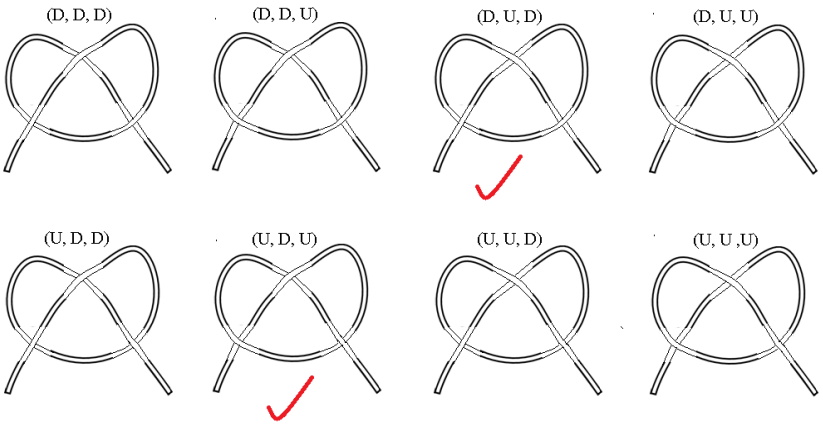
18- A piece of string is lying on the table. It is partially covered by three coins as seen in the figure. Under each coin the string is equally likely to pass over itself like this ⤫ or like this ⤫. What is the probability that the string is knotted after its end are pulled?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$

إجابة السؤال الثامن عشر (B)

الحل: تحت كل قطعة معدنية التقاء أجزاء الحبل له وضعان إما ⤫ ونرمز لها D أو ⤫ ونرمز لها U.

يمكن وصف نقاط الالتقاء الثلاث لأجزاء الحبل يمنى وعلوية ويسرى للتمييز بينها. لنرمز للأوضاع عند النقاط الثلاث بالثلاثي المرتب (يمنى، علوية، يسرى). يمكننا الآن أن نجد كل الأوضاع الممكنة وعددها 8، وهي:



عند سحب الحبل ستتكون عقدة في الوضعين $(D,U,D),(U,D,U)$ فقط.

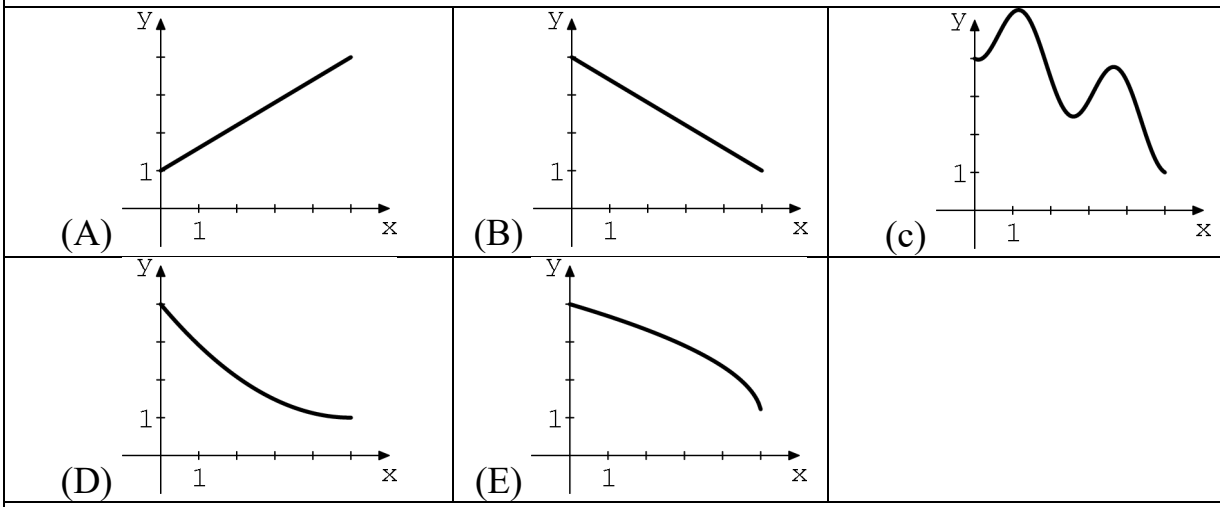
إذن الاحتمال المطلوب $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

(إذا كنت لم تقتنع بعد، يمكنك عمل تجربة عملية للتحقق من صحة الحل).

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

19- أمسك كلب مشاغب طرف لفة ورق حمام ومشى مبتعداً بسرعة ثابتة. أي من تمثيلات الدوال الآتية التي تصف العلاقة بين سمك اللفة y والمسافة التي يقطعه الكلب x؟

19- A naughty pup grabs the end of a roll of toilet paper and walks away at a constant speed. Which of the functions below best describes the thickness y of the roll as a function of the unrolled part x?



إجابة السؤال التاسع عشر (E)

الحل: بفرض سمك (طول حافة) ورقة الحمام هو k ثابت، وأن في البداية كانت قيمة y هي y_0 (ثابت).

بعد لفة واحدة تصبح قيمة y هي y_1 حيث $y_1 = y_0 - 2k$، بعد لفتين تصبح $y_2 = y_0 - 2(2k)$، بعد ثلاث لفات تصبح $y_3 = y_0 - 3(2k)$. عمومًا بعد n لفة تصبح y على الصورة $y_n = y_0 - 2nk$. ومنها

$$n = (y_0 - y_n) / 2k \qquad (1)$$

(يجب ملاحظة أن قيم y بعد كل لفة تمثل متتابعة حسابية أساسها $-2k$).

من جهة أخرى لدينا قيمة x في البداية هي $x_0 = 0$.

بعد لفة واحدة تصبح قيمة x هي x_1 حيث $x_1 = \pi y_0$، بعد لفتين تصبح $x_2 = x_1 + \pi y_1 = \pi y_0 + \pi y_1$،

بالمثل نثبت بعد ثلاث لفات تصبح $x_3 = \pi(y_0 + y_1 + y_2)$.

عمومًا بعد n لفة تصبح x على الصورة $x_n = \pi(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$.

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

ولأن قيم y بعد كل لفة تمثل متتابعة حسابية فإن $x_n = \frac{n\pi}{2}(y_0 + y_{n-1})$. (استخدمنا القانون: مجموع حدود متتالية من متتابعة حسابية يساوي نصف عدد تلك الحدود مضروبًا في مجموع الحد الأول والحد الأخير).

بالتعويض عن $y_{n-1} = y_n + 2k$ في صيغة x_n الأخيرة، نحصل على:

$$x_n = \frac{n\pi}{2}(y_0 + y_n + 2k) \qquad (2)$$

بالتعويض من (1) في (2) عن قيمة n ، نحصل على :

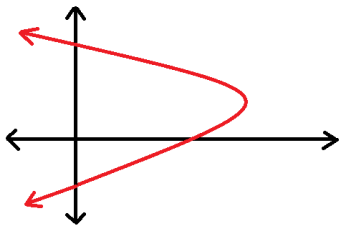
$$x_n = \frac{\pi}{4k}(y_0 - y_n)(y_0 + y_n + 2k)$$

بملاحظة أن y_0, k ثابتان، وأن الطرف الأيمن في المعادلة الأخيرة يحوي y_n^2 معاملها سالب.

إذن المعادلة التي تربط بين قيم x, y المتناظرة يمكن كتابتها على الصورة:

$$x - h = -4(y - k)^2$$

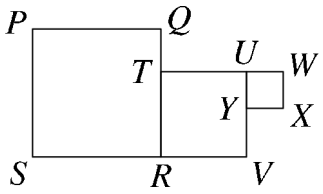
ويمثلها بيانيًا قطع مكافئ محور تماثله أفقي وفتحته لليسار.



ولأن x, y محدودتان فإن التمثيل البياني للعلاقة بين قيم x, y المتناظرة سيكون جزءًا محدودًا من ذلك القطع المكافئ، وهو ما يمثله الخيار E فقط.

(لاحظ أن x, y محدودتان لأن $l \le y \le y_0$ حيث l قطر دائرة الحامل المثبت عليه لفة الورق، بينما $0 \le x \le s$ حيث s كامل طول لفة الورق بعد فردها).

20- في الشكل، وضعت المربعات $PQRS, TRVU, UWXY$ معًا بحيث تتلامس كما بالشكل. النقط P, T, X على استقامة واحدة. مساحة المربع $PQRS$ تساوي 36 ومساحة المربع $TRVU$ تساوي 16. ما مساحة المثلث PXV؟

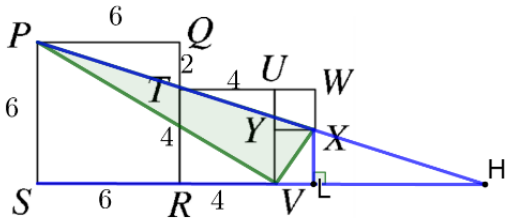


20- The diagram shows three squares $PQRS, TRVU, UWXY$. They are placed together, edge to edge. Points P, T, X lie on the same straight line. The area of $PQRS$ is 36 and the area of $TRVU$ is 16. What is the area of triangle PXV?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$14\frac{2}{3}$	$15\frac{1}{3}$	16	$17\frac{2}{3}$	18

إجابة السؤال العشرون (c)

الحل:



من تشابه المثلثين $\Delta PQT, \Delta XWT$ نجد أن $WX = 2$ ومنها $XL = 2$

من تشابه المثلثين $\Delta PQT, \Delta HRT$ نجد أن $RH = 12$ ومنها $VH = 8$

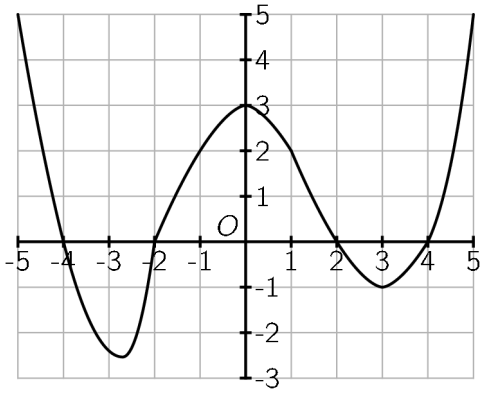
بالتالي

$$[PVX] = [PSH] - [PSV] - [VXH]$$
$$= \frac{6 \cdot 18}{2} - \frac{6 \cdot 10}{2} - \frac{8 \cdot 2}{2} = 16$$

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

5 points | مسائل الخمس نقاط

21- الشكل التالي يبين تمثيل الدالة $f:[-5,5]\to\mathbb{R}$. كم عدد الحلول المختلفة للمعادلة $f(f(x))=0$ ؟

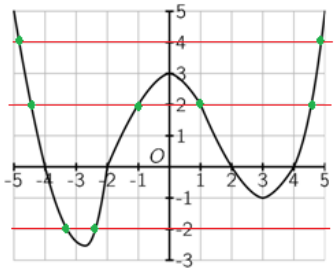


21- The figure shows the graph of a function $f:[-5,5]\to\mathbb{R}$. How many distinct solutions does the equation $f(f(x))=0$ have?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
2	4	6	7	8

إجابة السؤال الحادي والعشرون (E)

الحل:



من الرسم يتضح أن الدالة $f(x)$ لها أربعة جذور حقيقية مختلفة، أي:

$$f(-4)=f(-2)=f(2)=f(4)=0$$

بما أن المطلوب إيجاد جذور تركيب الدالة f مع نفسها، إذن لابد من البحث عن القيم التي تكون صورتها بالدالة f أحد القيم $x=\pm2,\pm4$.

من الرسم يتضح أنه لا توجد أي قيم صورتها -4 بالدالة $f(x)$.

من الرسم يتضح أنه توجد قيمتين صورتها -2 بالدالة $f(x)$.

من الرسم يتضح أنه توجد 4 قيم صورتها 2 بالدالة $f(x)$.

من الرسم يتضح أنه توجد قيمتين صورتها 4 بالدالة $f(x)$.

إذن عدد جذور الدالة $f(f(x))$ يساوي 8 .

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

22- تم كتابة الأعداد $1,2,7,9,10,15,19$ على سبورة. يتبادل لاعبان الأدوار في اللعب، كل لاعب في دوره يحذف أحد الأعداد إلى أن يتبقى عدد واحد فقط على السبورة. مجموع الأعداد التي حذفها أحدهم ضعف مجموع الأعداد التي حذفها الآخر. ما العدد المتبقي؟

22- The numbers $1,2,7,9,10,15,19$ are written down on a blackboard. Two players alternately delete one number each until only one number remains on the blackboard. The sum of the numbers deleted by one of the players is twice the sum of the numbers deleted by the other player. What is the number that remains?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
7	9	10	15	19

إجابة السؤال الثاني والعشرون **(B)**

الحل: نعلم أن كل من اللاعبين سيحذف ثلاثة أعداد من القائمة $1,2,7,9,10,15,19$، بشرط أن يكون مجموع أعداد أحدهما يساوي ضعف مجموع أعداد الآخر ويتبقى عدد في القائمة.

إذن الأعداد الستة المحذوفة لا بد أن تحقق الشرطين:

الأول: مجموع الأعداد الستة المحذوفة يقبل القسمة على 3 (لأنه يساوي ثلاثة أمثال مجموع الأعداد التي حذفها أحدهما).

الثاني: يمكن قسمة الأعداد إلى مجموعتين كل منها من 3 أعداد نسبة مجموعيهما بنسبة 2 إلى 1.

الآن نبدأ بالخطوة التالية: نجمع الأعداد كلها ثم نستبعد العدد الذي يجعل مجموع الأعداد الستة الباقية يقبل القسمة على 3.

$1+2+7+9+10+15+19=63$. إذن يمكن استبعاد 9 أو 15 ليتحقق الشرط الأول.

نختبر الحالتين لنحدد أي منهما تحقق الشرط الثاني:

عند استبعاد 15 يتبقى $1,2,7,9,10,19$ مجموعها 48، إذن مجموع أحدهما 32 والآخر 16. ولكن هذا غير ممكن أن نجد ثلاثة أعداد مجموعها 16.

عند استبعاد 9 يتبقى $1,2,7,10,15,19$ مجموعها 54، إذن مجموع أحدهما 36 والآخر 18. ويمكن تقسيمهما كما يلي $15,1,2$ والأخرى $19,10,7$.

أخيرًا العدد المتبقي على السبورة هو 9.

23– الدالة $f(x)$ تحقق $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ و $f(1)=2$. ما قيمة المقدار $\frac{f(2)}{f(1)}+\frac{f(3)}{f(2)}+\cdots+\frac{f(2021)}{f(2020)}$؟

23- The function $f(x)$ is such that $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ and $f(1)=2$. What is the value of $\frac{f(2)}{f(1)}+\frac{f(3)}{f(2)}+\cdots+\frac{f(2021)}{f(2020)}$?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
0	$\frac{1}{2}$	2	2020	None of the previous لا يوجد خيار صحيح

إجابة السؤال الثالث والعشرون (E)

الحل: لدينا

$$\frac{f(2)}{f(1)}=\frac{f(1+1)}{f(1)}=\frac{f(1)\cdot f(1)}{f(1)}=f(1)=2.$$

بالمثل لكل عددين صحيحين متتاليين $k,k+1$ يمكننا استنتاج أن.

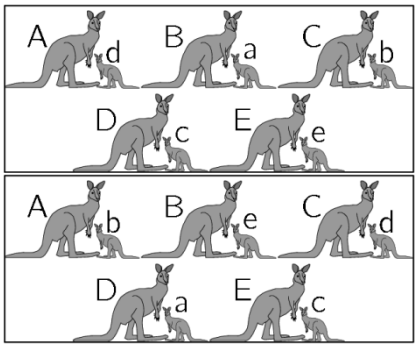
$$\frac{f(k+1)}{f(k)}=\frac{f(k)\cdot f(1)}{f(k)}=f(1)=2.$$

إذن قيمة المقدار هي:

$$\frac{f(2)}{f(1)}+\frac{f(3)}{f(2)}+\cdots+\frac{f(2021)}{f(2020)}=\underbrace{2+2+\cdots+2}_{2020 time}=2(2020)=4040$$

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

24- أسماء خمس من إناث الكنغر الأمهات هي A,B,C,D,E ، ولدى كل منهن طفل وأسماؤهم هي a,b,c,d,e . في الصور الجماعية الأولى يظهر اثنان فقط من الصغار يقفان بجانب أمهاتهما. وفي الصورة الجماعية الثانية يظهر ثلاثة فقط من الصغار يقفون بجانب أمهاتهم. أي من الأمهات اسم طفلها a ؟



24- Five kangaroos named A,B,C,D,E have one child each, named a,b,c,d,e. In the first group photo shown exactly two of the children are standing next to their mothers. In the second group photo exactly three of the children are standing next to their mothers. Whose child is a ?

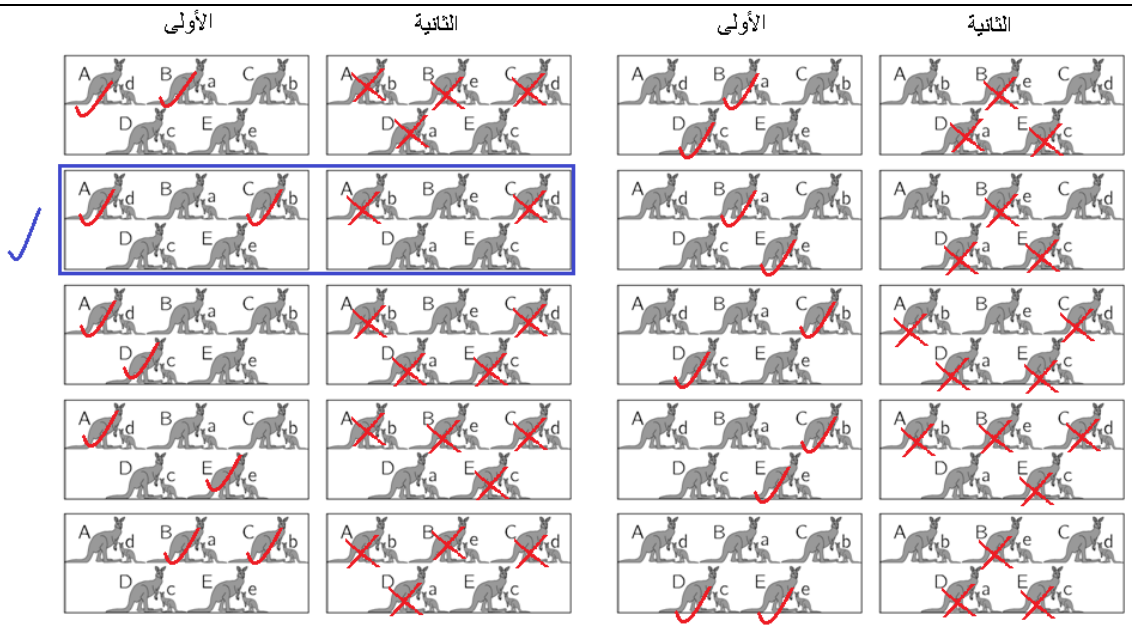
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
A	B	C	D	E

إجابة السؤال الرابع والعشرون (D)

الحل:

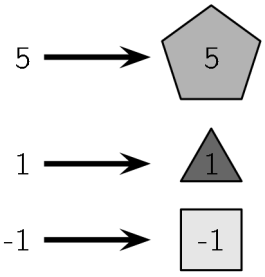
بملاحظة أن كل أم لها طفل واحد فقط، وبالطبع كل طفل له أم واحدة. ومعطى أن اثنين من الصغار في الصورة الأولى بجوار أمهاتهما، بينما في الصورة الثانية ثلاثة من الصغار بجوار أمهاتهم وبالتالي اثنان ليسا بجوار أمهاتهما.

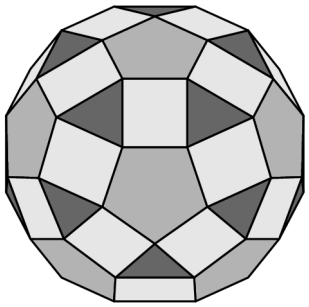
يمكنك الآن أن تفترض في كل خطوة أن طفلين في الصورة الأولى بجوار أمهاتهما، وتعد عدد الأطفال الذين لا يقفون بجوار أمهاتهم في الصورة الثانية لو كان عددهم اثنين بالضبط فقد وصلت للحالة الصحيحة، غير ذلك فإن الفرض خطأ وعليك تجربة فرض آخر.



تعليق: عمليًا هناك 10 خطوات على الأكثر، وليس بالضرورة أن تجري كل الخطوات إذا وصلت للحل بعد عدد أقل من الخطوات.

25– مجسم متعدد السطوح له 12 وجه خماسي منتظم وبقية الأوجه إما مربعات أو مثلثات متطابقة الأضلاع. كل وجه خماسي منتظم محاط بخمسة مربعات وكل وجه مثلث متطابق الأضلاع محاط بثلاثة مربعات. كتب جاسم على كل مثلث متطابق الأضلاع العدد 1 وكتب على كل خماسي منتظم العدد 5 وكتب على كل مربع العدد −1. ما مجموع الأعداد المكتوبة على المجسم؟





25- The solid shown in the diagram has 12 regular pentagonal faces, the other faces being either equilateral triangles or squares. Each pentagonal face is surrounded by 5 square faces and each triangular face is surrounded by 3 square faces. John writes 1 on each triangular face, 5 on each pentagonal face and −1 on each square face. What is the total of the numbers written on the solid?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
20	50	60	80	120

إجابة السؤال الخامس والعشرون (B)

الحل:

بما أن كل خماسي منتظم محاط بـ 5 مربعات وللمجسم 12 وجه خماسي وكل مربع مجاور لخماسيين.

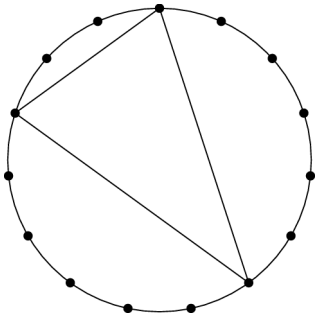
إذن عدد المربعات يساوي $\frac{12 \cdot 5}{2} = 30$.

بالمثل كل مثلث محاط بثلاثة مربعات وكل مربع متصل بمثلثين.

إذن عدد المثلثات يساوي $\frac{30 \cdot 2}{3} = 20$.

إذن مجموع الأعداد على أسطح المجسم يساوي $12(5) + 20(1) + 30(-1) = 50$.

26- تم تحديد 15 نقطة على محيط دائرة وعلى أبعاد متساوية. يمكن رسم مثلث بربط أي ثلاث نقاط منها بقطع مستقيمة. سوف نعتبر أي مثلثين أنهما المثلث نفسه إذا كانا متطابقين (أي إذا أمكن الحصول على أحدهما بتدوير أو/و انعكاس الأخر). كم عدد المثلثات المختلفة التي يمكن رسمها؟



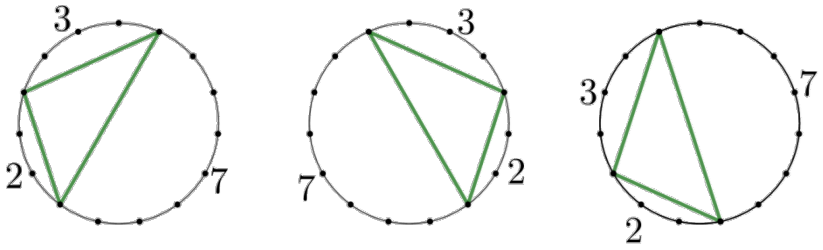
26- On a circle 15 points are equally spaced. We can form triangles by joining any three of these. We count two triangles as being the same if they are congruent i.e. one is a rotation and/or a reflection of the other. How many different triangles can be drawn?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
19	91	46	455	23

إجابة السؤال السادس والعشرون **(A)**

الحل: رسم المثلث يحتاج ربط ثلاث نقط من الخمسة عشر نقطة وتتبقى 12 تتوزع على 3 أقواس تحددها أضلاع المثلث المرسوم.

بما أن النقط على نفس البعد فإن طول القوس يتحدد بالضبط بعدد النقاط عليه. ونعلم أن تطابق قوسين في دائرة واحدة يقتضي تطابق الوتران اللذان يحددانهما. إذن أصبحت المسألة هو إيجاد عدد طرق توزيع 12 نقطة على ثلاثة أوتار والترتيب غير مهم. وهنا مثال لتوضيح الفكرة: إذا كان التوزيع $2,3,7$.



نبدأ بالقوس الأصغر:

– إذا كان القوس الأصغر لا يحوي أي نقطة تتوزع ال 12 نقطة على القوسين الآخرين كالتالي:

$\{0,12\}, \{1,11\}, \{2,10\}, \ldots, \{6,6\}$. ويصبح لدينا 7 مثلثات.

– إذا كان القوس الأصغر يحوي 1 نقطة تتوزع ال 11 نقطة على القوسين الآخرين كالتالي:

$\{1,10\}, \{2,9\}, \ldots, \{5,6\}$. **ويصبح لدينا** 5 **مثلثات.**

– إذا كان القوس الأصغر يحوي 2 **نقطة تتوزع ال** 10 **نقاط على القوسين الآخرين كالتالي:**

$\{2,8\}, \{3,7\}, \{4,6\}, \{5,5\}$. **ويصبح لدينا** 4 **مثلثات.**

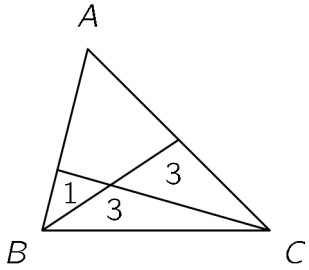
إذا كان القوس الأصغر يحوي 3 **نقاط تتوزع ال** 9 **نقاط على القوسين الآخرين كالتالي:** $\{4,5\}, \{3,6\}$.

ويصبح لدينا مثلثان.

إذا كان القوس الأصغر يحوي 4 **نقاط تتوزع ال** 8 **نقاط على القوسين الآخرين كالتالي** $4+4$. **ويصبح لدينا مثلث واحد.**

إذن عدد المثلثات يساوي $19 = 1 + 2 + 4 + 5 + 7$.

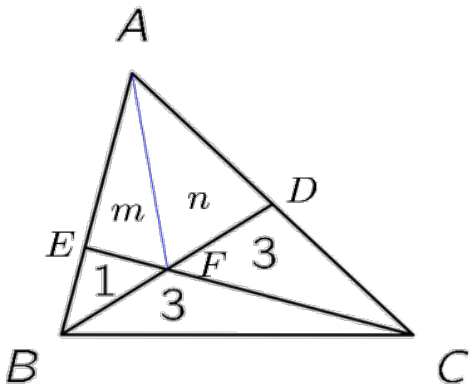
27- تم تقسيم المثلث ABC إلى أربعة أجزاء باستخدام مستقيمين، كما في الشكل. إذا علمت أن مساحات المثلثات الصغيرة الثلاثة تساوي $1\ ,\ 3\ ,\ 3$، فكم مساحة المثلث ABC؟



27- A triangle ABC is divided into four parts by two straight lines, as shown. The areas of the smaller triangles are 1, 3 and 3. What is the area of the original triangle?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
12	12.5	13	13.5	14

إجابة السؤال السابع والعشرون (A)



الحل:

لنفرض أن مساحة المثلث AEF تساوي m ومساحة المثلث ADF تساوي n. المثلثان BEF, BFC لهما قاعدتان على نفس المستقيم والرأس الثالث لكل منهما مشترك، أي لهما نفس الارتفاع وبالتالي يمكن إيجاد نجد النسبة بين EF, FC من قانون مساحة المثلث، وبالمثل النسبة بين BF, BD من المثلثين BEF, BCF كما يلي:

$$\frac{[BEF]}{[BCF]} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BF}{FD} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3BF = FD$$

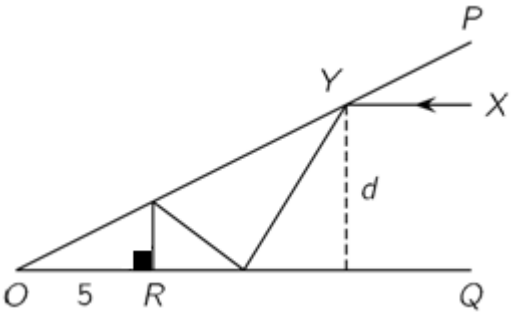
$$\frac{[BCF]}{[DCF]} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow \frac{BF}{BD} = 1 \Rightarrow BF = BD$$

بنفس المبدأ من النسبة بين مساحتي المثلثين ABF, ADF نجد أن $n = m + 1$ ، ومن النسبة بين مساحتي المثلثين AEF, ACF نجد أن $3m = n + 3$.

بحل نظام المعادلتين $n = m + 1$، $3m = n + 3$ نجد أن $m = 2, n = 3$.

أخيراً مساحة المثلث الكبير = 12.

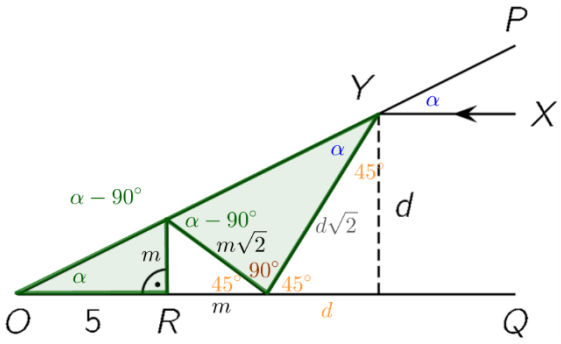
28- تم وضع سطحي مرآتين OP , OQ متقابلين بزاوية حادة (الرسم ليس على القياس). انطلق شعاع ضوء XY موازياً لسطح المرآة OQ وسقط على المرآة OP عند النقطة Y. ثم انعكس ليسقط على المرآة OQ، وانعكس مرة أخرى ليسقط على المرآة OP، وأخيرًا انعكس ليسقط على المرآة OQ بزاوية قائمة عند النقطة R، كما في الشكل. إذا كانت المسافة OR تساوي $5\,cm$ والشعاع XY يبعد عن المرآة OQ مسافة $d\ cm$. أوجد قيمة d؟



28- Two plane mirrors OP and OQ are inclined at an acute angle (diagram is not to scale). A ray of light XY parallel to OQ strikes mirror OP at Y. The ray is reflected and hits mirror OQ, is reflected again and hits mirror OP and is reflected for a third time and strikes mirror OQ at right angles at R, as shown. The distance OR is $5\ cm$. The ray XY is $d\ cm$ from the mirror OQ. What is the value of d?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
4	4.5	5	5.5	6

إجابة السؤال الثامن والعشرون (C)



الحل: نعلم أن زاوية الانعكاس= زاوية السقوط.

والزاويتان $\angle PYX = \angle POQ$ متناظرتان بين متوازيين.

إذن بسهولة يمكن إيجاد قيم الزوايا وستكون كما في الشكل. سنفرض أن طول الشعاع القائم على OR يساوي m. لاحظ أن لدينا مثلثان كل منهما متطابق الضلعين وقائم وبالتالي من فيثاغورس حصلنا على أطوال أضلاع الزاوية القائمة في المثلث الأخضر الكبير وهما $d\sqrt{2}, m\sqrt{2}$. المثلثان الأخضران متشابهان كما هو واضح من الزوايا. إذن من تناسب أضلاعهما:

$$\frac{d\sqrt{2}}{5} = \frac{m\sqrt{2}}{m} \Rightarrow d = 5$$

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

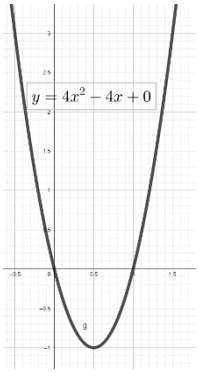
29- ليكن $M(k)$ القيمة العظمى للمقدار $|4x^2-4x+k|$ لأي x في الفترة $[-1,1]$، حيث k أي عدد حقيقي. ما أقل قيمة ممكنة لـ $M(k)$ ؟

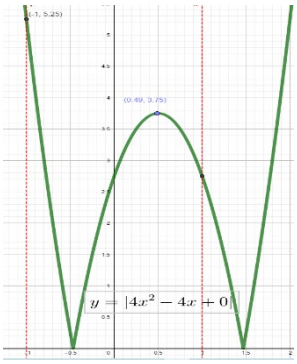
29- Let $M(k)$ be the maximum value of $|4x^2-4x+k|$ for x in the interval $[-1,1]$, where k can be any real number. What is the minimum possible value of $M(k)$?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
4	$\frac{9}{2}$	5	$\frac{11}{2}$	8

إجابة السؤال التاسع والعشرون (B)

الحل:



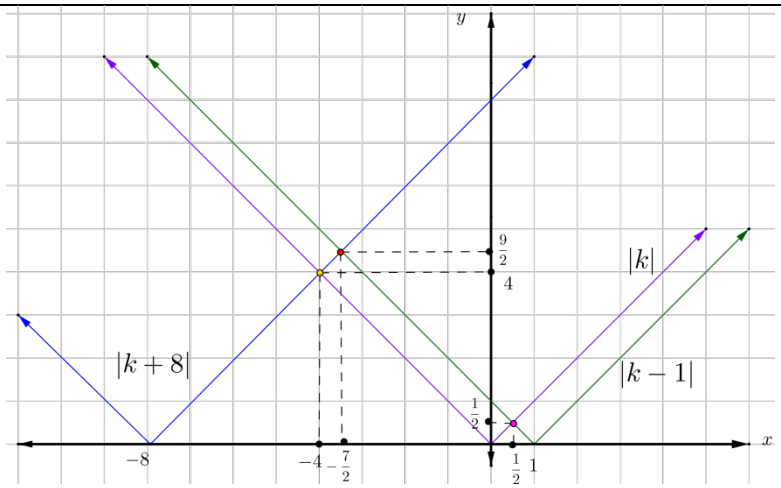


في الشكل تمثيل للقطع ودالة القيمة المطلقة للمقدار في حالة $k=0$.

$y = 4x^2 - 4x + k$ معادلة قطع مكافئ رأسه عند $(\frac{1}{2}, k-1)$، إذن القيم العظمى والصغرى للمقدار $|4x^2-4x+k|$ عند الرأس أو عند طرفي الفترة $[-1,1]$، أي عندما قيم x هي $-1, \frac{1}{2}, 1$.

وتصبح $M(k) = Max\{|k|, |k+8|, |k-1|\}$ لكل قيم k الحقيقة.

لمعرفة أقل قيمة لـ $M(k)$ ، وهي تعني أقل قيمة عظمى للقيم المطلقة الثلاثة في آنٍ واحد، والأنسب أن نرسم منحنيات تلك القيم الثلاث وستكون عند تقاطعها.



ستكون أقل قيمة للمقدار $M(k)$ عندما k تأخذ أحد القيم $-4, \frac{-7}{2}, \frac{1}{2}$ (إذا لم تكن تفضل الرسم يمكنك حل ثلاث معادلات كل معادلة تمثل تساوي قيمتين مطلقتين من الثلاثة، وستحصل على نفس قيم k).

وصلنا للخطوة الأخيرة.

$$M(-4) = Max\{|-4|, |-4+8|, |-4-1|\} = Max\{4,4,5\} = 5,$$
$$M(\frac{-7}{2}) = Max\{|\frac{-7}{2}|, |\frac{-7}{2}+8|, |\frac{-7}{2}-1|\} = Max\{\frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}\} = \frac{9}{2},$$
$$M(\frac{-1}{2}) = Max\{|\frac{-1}{2}|, |\frac{-1}{2}+8|, |\frac{-1}{2}-1|\} = Max\{\frac{1}{2}, \frac{15}{2}, \frac{3}{2}\} = \frac{15}{2}$$

إذن أقل قيمة لـ $M(k)$ تساوي $\frac{9}{2}$ وتبلغها عند $k = -\frac{7}{2}$.

30- يلعب لاعبان A, B لعبة بحيث يفوز اللاعب الذي يتقدم بفارق 3 نقاط على منافسه أولًا. اللاعبان لهما فرص متساوية للفوز في كل نقطة. في لحظة ما تقدم اللاعب A على B بنقطة واحدة. ما احتمال فوز اللاعب A ؟

30- A certain game is won when one player gets 3 points ahead. Two players A and B are playing the game and at a particular point, A is 1 point ahead. Each player has an equal probability of winning each point. What is the probability that A wins the game?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$

إجابة السؤال الثلاثون (B)

الحل: لنفرض أن احتمال فوز A من لحظة تقدمه بنقطة واحدة يساوي p.

هناك أربع حالات لنتيجة النقطتين التاليتين: AA, AB, BA, BB.

في الحالة الأولى وهي AA مؤكد فوز A واحتمالها $\frac{1}{4}$.

في الحالة الثانية والثالثة وهما AB, BA سنعود للحظة مثل البداية، وفي كل منهما احتمال فوز A فيها p.

إذن احتمال فوز A في تلك الحالتين هو $p(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}) = \frac{p}{2}$.

في الحالة الرابعة سيكون B في نفس وضع A في بداية المسألة وبالتالي احتمال فوز B بعدها p وبالتالي احتمال فوز A يساوي $1-p$. وفي هذه الحالة يكون احتمال فوز A يساوي $\frac{1}{4}(1-p)$.

إذن احتمال فوز اللاعب A المطلوب بطريقتين هو $p = \frac{1}{4}+\frac{p}{2}+\frac{1-p}{4}$.

ومنها $p = \frac{2}{3}$.

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.