

## الحلول الكاملة لكتيب ثاني وثالث ثانوي 2022

11-12 Student 2022

إخراج اللجنة العلمية

أ عبد الوهاب الشيخ      أ طارق فضل

د عبد العزيز بن عبيد

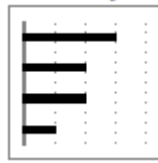
إشراف

أ صفوت الطناني

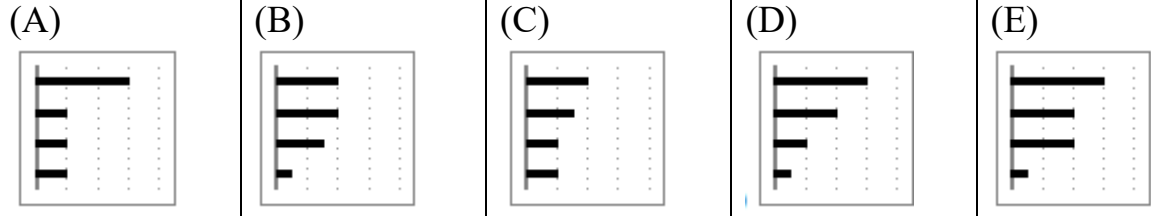
3 points

مسائل الثلاثة نقاط

1) يظهر الرسم البياني مقدار الوقت الذي قضاه هاشم الأسبوع الماضي في استخدام كل تطبيق من تطبيقات جواله. يتم ترتيب التطبيقات من أكبر إلى أقل وقت قضاه في استخدامه. هذا الأسبوع، قضى هاشم بالضبط نفس المدة من الوقت على اثنين من تطبيقاته كما في الأسبوع الماضي، ولكنه قضى نصف المدة من الوقت على تطبيقين آخرين. أي من الرسوم البيانية أدناه **لا** يمكن أن يكون الرسم البياني لهذا الأسبوع؟



1) On Hashem's smartphone, the diagram shows how much time he spent last week on each of his apps. The apps are ordered from greatest to least time spent. This week, he spent exactly the same amount of time as last week on two of his apps, but only half as much time on the other two. Which of the diagrams below **cannot** be the diagram for this week?



الجواب: E

نلاحظ أن التطبيقات في الخيارات مُرتبة من الأكثر إلى الأقل استخدامًا.

- في الرسم A التطبيقين من الرسم الأصلي الثاني والثالث قضى فيهما نصف المدة بينما الأول والرابع قضى فيهما المدة نفسها إذا الرسم يحقق الشرط.
- في الرسم B التطبيقين من الرسم الأصلي الثاني والثالث قضى فيهما المدة نفسها فارتفعوا أعلى الرسم الجديد بينما الأول والرابع قضى فيهما نصف المدة وأصبحوا أسفل الرسم البياني، إذا الرسم يحقق الشرط.
- بنفس الطريقة يمكن دراسة الرسم C و D وسنجد أنهم يحققون الشروط.
- الرسم الوحيد الذي لا يحقق الشرط هو E حيث ان التطبيق الأول والثاني والثالث قضى فيهم نفس مدة الاستخدام بينما الأخير قضى فيه نصف مدة الاستخدام.

2) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من ثلاث خانات وتقبل القسمة على 13؟  
2) How many positive three-digit integers are divisible by 13?

| (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 68  | 69  | 70  | 76  | 77  |

الجواب: B

الأعداد المكونة من ثلاث خانات هي الأعداد من 100 إلى 999، أصغر عدد منها يقبل القسمة على 13 هو 104 وأكبر عدد منها يقبل على 13 هو 988. إذن قائمة الأعداد المكونة من 3 خانات وتقبل القسمة على 13:

104, 117, ..., 988

عند قسمة جميع الأعداد على 13 تصبح القائمة:

8, 9, ..., 76

وعدد الأعداد فيها يساوي  $76 - 8 + 1 = 69$ .

3) البتول أكبر من شوق وأصغر من ليلي. تغريد أكبر من البتول. أي فتاتين منهن يمكن أن تكونا في نفس العمر؟

3) Albatool is older than Shook and younger than Layla. Taghreed is older than Albatool. Which two people could be the same age?

| (A)                | (B)                | (C)             | (D)                | (E)                   |
|--------------------|--------------------|-----------------|--------------------|-----------------------|
| Shook and Taghreed | Taghreed and Layla | Layla and Shook | Albatool and Layla | Taghreed and Albatool |
| شوق وتغريد         | تغريد وليلى        | ليلى وشوق       | البتول وليلى       | تغريد والبتول         |

الجواب: B

تغريد أكبر من البتول، أي البتول أصغر من تغريد.  
البتول أكبر من شوق وأصغر من ليلي، أي البتول أصغر من ليلي وشوق أصغر من البتول.  
نستنتج مما سبق أن شوق أصغر من البتول، والبتول أصغر من كل من ليلي وتغريد.  
إذن لا يمكن أن يتساوى عمر أي من شوق والبتول وليلى،  
وبالتالي الخيار المتبقي فقط أن ليلي وتغريد لهما العمر نفسه.

4) حاصل ضرب أرقام خانات عدد صحيح ذي 10 خانات يساوي 15. كم مجموع أرقام خانات هذا العدد؟

4) The product of the digits of a 10-digit integer is 15. What is the sum of the digits of this number?

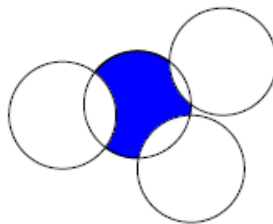
| (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 8   | 12  | 15  | 16  | 20  |

الجواب: D

أولاً نحلل العدد 15 الى عوامله الأولية فنحصل على  $15 = 3 \times 5$ . إذن ستكون أحد أرقام العدد 3 وآخر 5، وبقية الأرقام يجب أن يكون كل منها 1، ومن ثم يتكرر الرقم 1 ثمان مرات. وبالتالي حاصل جمع جميع أرقام يساوي:

$$8 \times 1 + 3 + 5 = 16$$

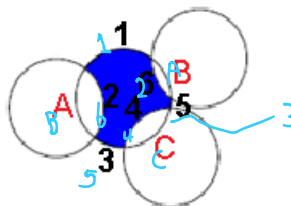
5) تتقاطع أربع دوائر نصف قطر كل منها 1، كما هو موضح في الشكل أدناه. كم يحيط المنطقة المظللة؟



5) Four circles, each of radius 1, intersect as shown. What is the perimeter of the shaded region?

| (A)   | (B)                                             | (C)              | (D)    | (E)     |
|-------|-------------------------------------------------|------------------|--------|---------|
| $\pi$ | Some number between $\frac{3\pi}{2}$ and $2\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ | $\pi^2$ |
| $\pi$ | عدد بين $2\pi$ و $\frac{3\pi}{2}$               | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ | $\pi^2$ |

الجواب: D



محيط المنطقة المظللة يساوي مجموع أطوال الأقواس الستة المبينة في الشكل من القوس رقم 1 الى القوس رقم 6. لاحظ أن الأقواس 1, 3, 5 من محيط الدائرة الوسطى.

بما أن الدوائر متطابقة إذا طول القوس 2 يساوي طول القوس A وطول القوس 4 يساوي طول القوس C وطول القوس 6 يساوي طول القوس B.

أي أن طول محيط المنطقة المظللة يساوي مجموع الأقواس 1, A, 3, C, 5, B وهذا بالضبط محيط الدائرة الوسطى. وبالتالي محيط المنطقة المظللة يساوي  $2\pi = 2(1)\pi$ .

6) تكتب دلال بشكل تصاعدي جميع الأعداد الصحيحة من 2 إلى 2022 والتي تكتب باستخدام الرقم 0 و الرقم 2 فقط. ما العدد الذي يكون في منتصف قائمة دلال؟

6) Dalal writes, in increasing order, all the integers from 2 to 2022 which use only 0s and 2s. What is the number in the middle of her list?

| (A) | (B) | (C) | (D)  | (E)  |
|-----|-----|-----|------|------|
| 200 | 220 | 222 | 2000 | 2002 |

الجواب: B

من السهل كتابة كل الأعداد التي تحقق المطلوب وهي:

عدد من منزلة واحدة: 2

عددين من منزلتين: 20, 22

أربعة أعداد من ثلاث منازل: 200, 202, 220, 222

أربعة أعداد من أربع منازل: 2000, 2002, 2020, 2022

وبالتالي قائمة دلال ستكون مكونة من 11 عددًا، الترتيب التصاعدي لهم هو:

2, 20, 22, 200, 202, 220, 222, 2000, 2002, 2020, 2022

إذن العدد الأوسط في القائمة (الوسيط) هو 220.

7) كم عدد الحلول الحقيقية للمعادلة  $(x-2)^2 + (x+2)^2 = 0$  ؟

7) How many real solutions does the equation  $(x-2)^2 + (x+2)^2 = 0$  have?

| (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0   | 1   | 2   | 3   | 4   |

الجواب: A

نحل المعادلة بعد التبسيط لتصبح

$$(x-2)^2 + (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$$

ولكن هذه المعادلة ليس لها حلول حقيقية.

**طريقة أخرى:**

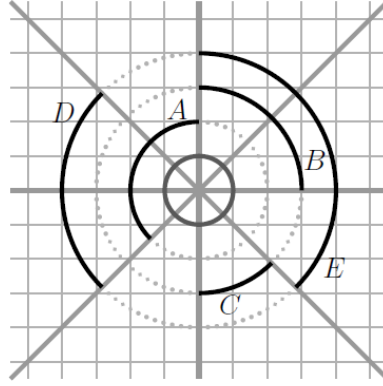
المعادلة تحوي حاصل جمع عددين مربعين حقيقيين  $(x-2)^2, (x+2)^2$  يساوي صفر، إذن كل منهما يساوي صفر في الوقت نفسه.

$$\text{أي } (x-2)^2 = 0, (x+2)^2 = 0$$

إذن  $x = 2, x = -2$  في نفس الوقت ، وهذا غير ممكن.

إذن المعادلة ليس لها حل حقيقي.

8) تتقاطع أربعة خطوط مستقيمة مكونةً ثماني زوايا متساوية. أي قوس من الأقواس السوداء يكون طوله مساوياً لمحيط الدائرة الرمادية الصغيرة؟



8) Four lines intersect forming eight equal angles. Which black arc has the same length as the small grey circle?

| (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| A   | B   | C   | D   | E   |

الجواب: D

نحسب محيط الدوائر الأربع المشتركة في المركز ثم نحسب طول كل قوس من الأقواس الخمسة.  
محيط الدائرة الأولى (الأصغر)  $= 2\pi$  ، محيط الدائرة الثانية  $= 4\pi$  ، محيط الدائرة الثالثة  $= 6\pi$  ،  
محيط الدائرة الرابعة (الأكبر)  $= 8\pi$

القوس A جزء من محيط الدائرة الثانية وزاويته تساوي  $135^\circ$  إذا طوله  $\frac{135^\circ}{360^\circ} \cdot 4\pi = \frac{\pi}{2}$

القوس B جزء من محيط الدائرة الثالثة وزاويته تساوي  $90^\circ$  إذا طوله  $\frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 6\pi = \frac{3\pi}{2}$

القوس C جزء من محيط الدائرة الثالثة وزاويته تساوي  $45^\circ$  إذا طوله  $\frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot 6\pi = \frac{3\pi}{4}$

القوس D جزء من محيط الدائرة الرابعة وزاويته تساوي  $90^\circ$  إذا طوله  $\frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 8\pi = 2\pi$

القوس E جزء من محيط الدائرة الرابعة وزاويته تساوي  $135^\circ$  إذا طوله  $\frac{135^\circ}{360^\circ} \cdot 8\pi = 3\pi$

وبالتالي القوس المساوي لمحيط الدائرة الأصغر (الرمادية) هو القوس D .

9) لتكن  $a, b, c$  ثلاثة أعداد غير صفرية. العددان  $-2a^4b^3c^2$  ,  $3a^3b^5c^{-4}$  لهما نفس الإشارة. أي من العبارات التالية بالتأكيد صحيحة؟

9) Let  $a, b, c$  be non-zero numbers. The numbers  $-2a^4b^3c^2$  and  $3a^3b^5c^{-4}$  have the same sign. Which of the following is definitely true?

| (A)      | (B)     | (C)     | (D)      | (E)     |
|----------|---------|---------|----------|---------|
| $ab > 0$ | $b < 0$ | $c > 0$ | $bc > 0$ | $a < 0$ |

الجواب: E

حاصل ضرب أي عددين غير صفرين ولهما نفس الإشارة عدد موجب أي:

$$(-2a^4b^3c^2)(3a^3b^5c^{-4}) > 0$$

ومنها  $-6a^7b^8c^{-2} > 0$  . لكن  $a^6b^8c^{-2}$  عدد موجب،

وبالتالي يمكن قسمة طرفي المتباينة بدون تغيير إشارتها أي

$$-6a > 0 . ومنها a < 0$$

10) حدد محمد النقاط  $A, B, C, D$  بهذه الترتيب على خط مستقيم، كما هو مبين في الرسم أدناه. المسافة بين النقطتين  $A, C$  تساوي  $12 \text{ cm}$  والمسافة بين النقطتين  $B, D$  تساوي  $18 \text{ cm}$ . ما المسافة بين نقطة منتصف القطعة  $AB$  ونقطة منتصف القطعة  $CD$  ؟



10) Mohamed has marked the points  $A, B, C$  and  $D$  in this order on a straight line, as shown in the diagram. The distance between  $A$  and  $C$  is  $12 \text{ cm}$  and between  $B$  and  $D$ ,  $18 \text{ cm}$ . What is the distance between the midpoint of  $AB$  and the midpoint of  $CD$  ?

| (A)             | (B)             | (C)             | (D)            | (E)            |
|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|
| $15 \text{ cm}$ | $12 \text{ cm}$ | $18 \text{ cm}$ | $6 \text{ cm}$ | $9 \text{ cm}$ |

الجواب:  $A$

بما أن المسافة بين النقطتين  $A, C$  تساوي  $12 \text{ cm}$  والمسافة بين النقطتين  $B, D$  تساوي  $18 \text{ cm}$ ،  
إذاً

$$AC + BD = 30 \Rightarrow AB + 2BC + BD = 30$$

المسافة بين منتصفتي  $AB, CD$  تساوي  $\frac{1}{2}AB + BC + \frac{1}{2}CD$ ،

إذاً

$$\frac{1}{2}AB + BC + \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}(AB + BC + CD) = \frac{1}{2}(30) = 15$$

4 points

مسائل الأربع نقاط

11) عندما نظر ثامر إلى عداد المياه في حمامه، لاحظ أن جميع أرقام العدد الظاهر على شاشة العداد مختلفة. ما كمية المياه التي سيستهلكها لتصبح جميع أرقام العدد الظاهر على العداد مختلفة مرة أخرى؟

$$\boxed{9} \boxed{1} \boxed{8} \boxed{7} \boxed{6} m^3$$

11) When Thamer looks at the water meter in his bathroom, he notices that all the digits on the meter are different. How much water will be used until the next time all the digits on the meter are different?

| (A)         | (B)         | (C)         | (D)         | (E)         |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $0.006 m^3$ | $0.034 m^3$ | $0.086 m^3$ | $0.137 m^3$ | $1.048 m^3$ |

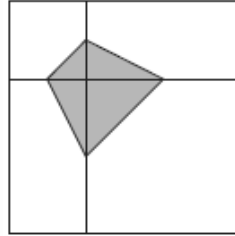
الجواب D

سنقوم بجمع كمية المياه المستهلكة في كل خيار مع العدد الظاهر على العداد بالفعل، الخيار الصحيح هو الذي يعطي أصغر مجموع أرقامه كلها مختلفة:

- الخيار A: المجموع  $91.876 + 0.006 = 91.882$  (مرفوض لأن أرقام المجموع ليست مختلفة).
- الخيار B: المجموع  $91.876 + 0.034 = 91.910$  (مرفوض لأن أرقام المجموع ليست مختلفة).
- الخيار C: المجموع  $91.876 + 0.086 = 91.962$  (مرفوض لأن أرقام المجموع ليست مختلفة).
- الخيار D: المجموع  $91.876 + 0.137 = 92.013$  (مقبول لأن أرقام المجموع مختلفة).
- الخيار E: المجموع  $91.876 + 1.048 = 92.924$  (مرفوض لأن أرقام المجموع ليست مختلفة).

إذن الخيار الصحيح هو D.

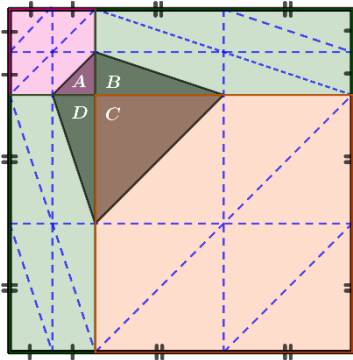
12) تم تقسيم مربع كبير إلى مربعين غير متطابقين ومستطيلين متطابقين، كما هو موضح في الشكل. رؤوس المضلع الرباعي المظلل هي نقاط المنتصف لأضلاع المربعين. إذا علمت أن مساحة المنطقة المظلمة تساوي 3، فكم مساحة المنطقة غير المظلمة من المربع الكبير؟



12) A large square is divided into two unequal squares and two equal rectangles, as shown. The vertices of the shaded quadrilateral are the midpoints of the sides of the two squares. The area of the shaded quadrilateral is 3. What is the area of the unshaded part of the large square?

| (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 12  | 15  | 18  | 21  | 24  |

الجواب: D



الحل: بما أن رؤوس المضلع المظلل هي منتصفات الاضلاع فيمكن تقسيم الشكل كما في الصورة.

تم تجزئة المربع الصغير إلى ثماني مثلثات متطابقة والمظلل أحدها،  
إذاً نسبة مساحة المثلث A إلى مساحة المربع الصغير يساوي  
1 : 8 ، بالمثل للمربع الكبير والمستطيلين المتطابقين.

وبالتالي نسبة مساحة الجزء المظلل يساوي 1 : 8 من مساحة  
المربع الأكبر.

إذن مساحة المربع الأكبر =  $3 \times 8 = 24$ .

إذن مساحة المنطقة غير المظلمة يساوي  $24 - 3 = 21$ .

13) ما القاسم المشترك الأكبر للعددين  $2^{2021} + 2^{2022}$  ,  $3^{2021} + 3^{2022}$  ؟

13) What is the greatest common divisor of  $2^{2021} + 2^{2022}$  ,  $3^{2021} + 3^{2022}$  ?

| (A)        | (B) | (C) | (D) | (E) |
|------------|-----|-----|-----|-----|
| $2^{2021}$ | 1   | 2   | 6   | 12  |

الجواب: E

لاحظ أن

$$2^{2021} + 2^{2022} = 2^{2021}(1 + 2) = 3 \times 2^{2021}$$

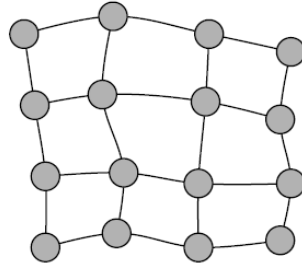
$$3^{2021} + 3^{2022} = 3^{2021}(1 + 3) = 4 \times 3^{2021}$$

إذاً

$$\begin{aligned} \gcd(2^{2021} + 2^{2022}, 3^{2021} + 3^{2022}) &= \gcd(12 \times 2^{2019}, 12 \times 3^{2020}) \\ &= 12 \times \gcd(2^{2019}, 3^{2020}) = 12 \times 1 = 12 \end{aligned}$$

استخدمنا الرمز  $\gcd(a, b)$  ليرمز للقاسم المشترك الأكبر بين العددين  $(a, b)$ .

(14) يظهر مخطط ل 16 مدينة متصلة بطرق فيما بينها كما يظهر في الشكل ، بحيث كل نقطة تمثل مدينة. تريد الحكومة بناء محطات لتوليد الكهرباء في بعض المدن. يمكن لكل محطة توليد الكهرباء توفير ما يكفي من الكهرباء للمدينة التي تقع فيها وأي مدن متصلة بتلك المدينة بطريق واحد فقط. ما هو أصغر عدد من محطات توليد الكهرباء التي يجب بناؤها لتزويد جميع المدن بما يكفيها من الكهرباء؟

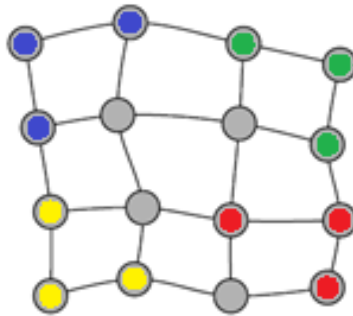


The map shows a region with 16 cities connected by roads. The Government wants to build electricity power plants in some of the cities. Each power plant can provide enough electricity for the city where it is sited, and any cities connected to that city by a single road. What is the smallest number of power plants that need to be built to provide enough electricity for all cities?

| (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 3   | 4   | 5   | 6   | 7   |

الجواب: B.

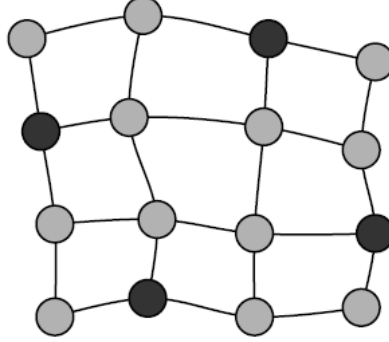
سنثبت أن 3 محطات لا تكفي لتزويد جميع المدن بما يكفيها من الكهرباء.



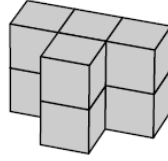
لو نظرنا للمدن الأربعة الزاوية في المخطط، في المخطط أعلاه، سنجد أن تزويدها بالكهرباء يتطلب بناء محطة (على الأقل) في كل من: المدن الخضراء، والمدن الزرقاء، والمدن الحمراء، والمدن الصفراء. إذن تزويد المدن الزاوية الأربعة بالكهرباء لن يتم ببناء أقل من 4 محطات.

طريقة أخرى لاستنتاج أن 3 محطات لا تكفي لتزويد جميع المدن بما يكفيها من الكهرباء:

بما أن كل مدينة متصلة بأربع مدن أخرى على الأكثر، لذلك يمكن لكل محطة توفير الكهرباء في 5 مدن على الأكثر. ولأن  $3 \times 5 = 15$  أقل من عدد المدن وهو 16، يترتب على ذلك أن 3 محطات غير كافية لتوفير الكهرباء لجميع المدن، لذلك نحن بحاجة إلى 4 محطات أو أكثر. يوضح الشكل التالي أنه يمكن تزويد كل المدن بالكهرباء ببناء 4 محطات فقط في المدن الملونة بالأسود.



15) أي من أزواج القطع أدناه يمكن وضعها معا لبناء الجسم المبين في الشكل ؟

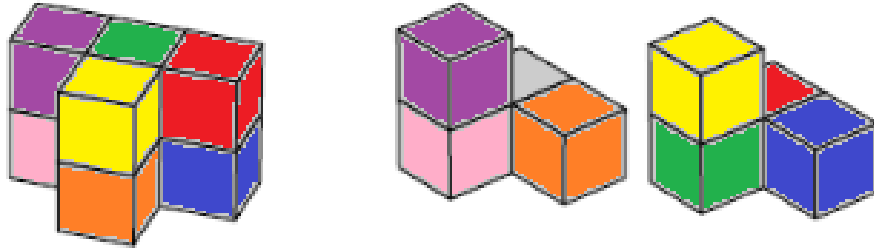


15) Which of the pairs of pieces below can be put together to build the shape shown in the diagram above?

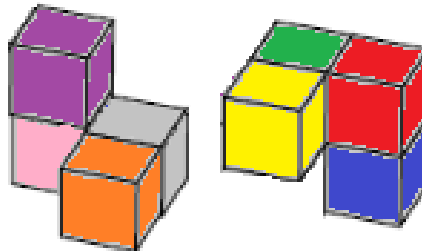
| (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
|-----|-----|-----|-----|-----|
|     |     |     |     |     |

الجواب: A.

الصورة التالية توضح لماذا A هو الخيار الصحيح.



فقط نحتاج تحريك القطعتين في الشكل الأيمن بحيث يكون كل مكعب في موضعه في الشكل الأيسر المطلوب. الشكل التالي يوضح طريقة تحريك كل قطعة.



16) تلعب مريم في بطولة مكونة من 8 لاعبات. تعلم مريم أنه يمكنها الفوز على الجميع ما عدا أمل، وأن أمل يمكنها الفوز على الجميع. في الجولة الأولى، يتم تنظيم اللاعبات بشكل عشوائي إلى أربعة أزواج، والفائزة في كل مباراة تتأهل إلى الدور الثاني. هناك مباراتان في الدور الثاني، وتتأهل الفائزتان في هاتين المباراتين إلى المباراة النهائية. ما احتمال عدم وصول مريم للمباراة النهائية؟

16) Mariam is playing in an 8 player tournament. She knows she will beat everyone except Amal, who will beat everybody. In the first round, players are organized randomly into four pairs, and the winner of each match proceeds to the second round. In the second round, there are two matches, and the winners of these matches proceed to the final. What is the probability that Mariam does not get to the final?

| (A) | (B)           | (C)           | (D)           | (E)           |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 1   | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{4}{7}$ |

الجواب: D

**الطريقة الأولى (الحالات الممكنة):** لدينا حالتان ممكنتان لعدم وصول مريم الى المباراة النهائية: إما أن تنهزم في الجولة الأولى أو تنهزم في الجولة الثانية.

احتمال أن تنهزم مريم في الجولة الأولى إذا لعبت مع أمل فقط وبالتالي يساوي  $\frac{1}{7}$  (لأنها مباراة واحدة من أصل 7 مباريات يمكن أن تلعبها مع كل الفتيات).

احتمال أن تفوز مريم في الجولة الأولى ولكن تنهزم في الثانية يساوي  $\frac{6}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{7}$ .

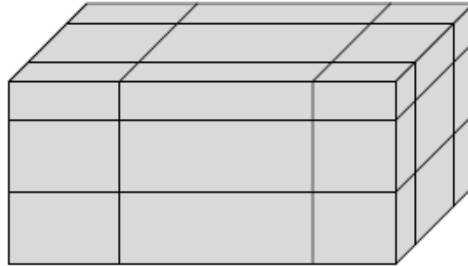
إذاً احتمال عدم وصول مريم للمباراة النهائية يساوي  $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$ .

**الطريقة الثانية (المتمة):** الحالة المتمة لعدم وصول مريم للمباراة النهائية هي وصول مريم للمباراة النهائية

والتي تعني أنها فازت في الجولة الأولى والثانية، وهذا الاحتمال يساوي  $\frac{6}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{7}$ .

إذن احتمال عدم وصول مريم للمباراة النهائية يساوي  $1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$ .

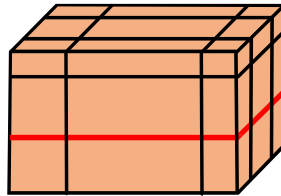
17) تم تقطيع متوازي مستطيلات مساحته الكلية  $S$  إلى 27 متوازي مستطيلات بواسطة ست مستويات كما هو موضح في الشكل. كل مستوى موازي لوجه ولكن بعده عن الوجه عشوائي. بعد ذلك يتم فصل الأجزاء الـ 27. ما هي المساحة الكلية لجميع الأجزاء الصغيرة بدلالة  $S$ ؟



17) A cuboid of surface area  $S$  is cut by six planes as shown. Each plane is parallel to a face, but its distance from the face is random. Now the cuboid is separated in 27 smaller parts. What, in terms of  $S$ , is the total surface area of all 27 smaller parts?

| (A)  | (B)            | (C)  | (D)  | (E)                  |
|------|----------------|------|------|----------------------|
| $2S$ | $\frac{5}{2}S$ | $3S$ | $4S$ | None of the previous |
| $2S$ | $\frac{5}{2}S$ | $3S$ | $4S$ | لا شيء مما سبق       |

الجواب: C



لتكن مساحات ثلاثة أوجه مختلفة هي  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ، بحيث يكون  $S = 2A + 2B + 2C$ . الآن، يُضاف إلى إجمالي المساحة المقدار  $2A$ ، حيث  $A$  هي مساحة سطح الوجه الموازي للقطع. لاحظ أن مساهمة جميع القطع الستة هي  $4A + 4B + 4C = 2S$ . لذا فإن إجمالي المساحة هو  $S + 2S = 3S$ .

18) المتوسط الحسابي لخمسة أعداد يساوي 24. المتوسط الحسابي للأعداد الثلاثة الأصغر يساوي 19، والمتوسط الحسابي للأعداد الثلاثة الأكبر يساوي 28. ما الوسيط للأعداد الخمسة؟

18) Five numbers have a mean of 24. The mean of the three smallest numbers is 19 and the mean of the three largest numbers is 28. What is the median of the five numbers?

| (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 20  | 21  | 22  | 23  | 24  |

الجواب: B

لتكن الأعداد الخمسة  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$ ، إذن الوسيط هو العدد  $a_3$

المتوسط الحسابي لخمسة أعداد يساوي 24، أي

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5 \times 24 = 120 \quad \text{--- (1)}$$

المتوسط الحسابي للأعداد الثلاثة الأصغر يساوي 19 أي

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3 \times 19 = 57 \quad \text{--- (2)}$$

والمتوسط الحسابي للأعداد الثلاثة الأكبر يساوي 28. أي

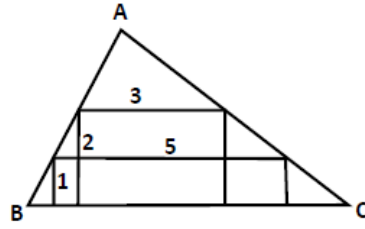
$$a_3 + a_4 + a_5 = 3 \times 28 = 84 \quad \text{--- (3)}$$

إذن بإجراء (2) + (3) - (1) ينتج

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (a_3 + a_4 + a_5) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = 57 + 84 - 120$$

$$a_3 = 21$$

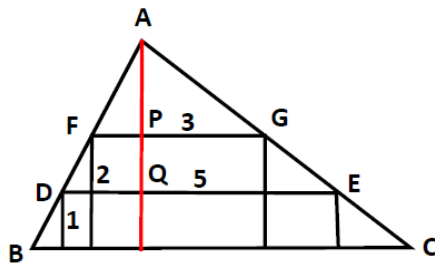
19) تم رسم مستطيلين داخل المثلث  $\triangle ABC$ ، كما في الشكل أدناه. بعدا أحدهما 5 , 1 وبعدا الآخر 3 , 2. ما ارتفاع المثلث النازل على القاعدة  $BC$  ؟



Two rectangles are inscribed inside a triangle  $ABC$ . The dimensions of the rectangles are  $1 \times 5$  and  $2 \times 3$ , respectively, as shown. What is the height of the triangle with base  $BC$  ?

| (A) | (B)           | (C)           | (D)            | (E)                  |
|-----|---------------|---------------|----------------|----------------------|
| 3   | $\frac{7}{2}$ | $\frac{8}{3}$ | $\frac{16}{5}$ | None of the previous |
| 3   | $\frac{7}{2}$ | $\frac{8}{3}$ | $\frac{16}{5}$ | لا شيء مما سبق       |

الجواب: B



بفرض ارتفاع المثلث  $\triangle ABC$  النازل على القاعدة  $BC$

هو  $h$ ، بالتالي ارتفاع المثلث  $\triangle ADE$  النازل على

القاعدة  $DE$  هو  $h - 1$ ، ارتفاع المثلث  $\triangle AFG$  النازل

على القاعدة  $FG$  هو  $h - 2$ .

بما أن  $\triangle AFG \sim \triangle ADE$  (من حالة AA)

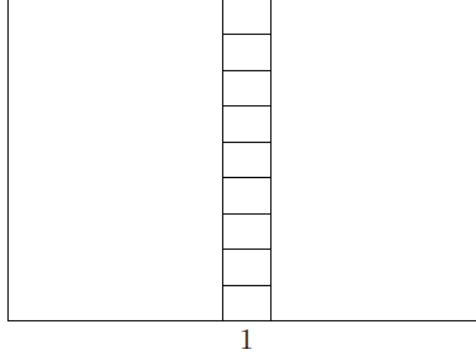
إذن

$$\frac{h-2}{h-1} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5h - 10 = 3h - 3$$

إذن

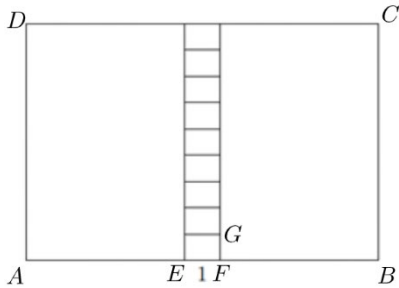
$$2h = 7 \Rightarrow h = 3.5$$

20) تم تقسيم مستطيل إلى 11 مستطيل أصغر، كما هو موضح في الشكل أدناه. كل مستطيل من المستطيلات الـ 11 يشابه المستطيل الأصلي. وضعية المستطيلات التسعة الصغرى نفس وضعية المستطيل الأصلي. طول قاعدة المستطيل الصغير تساوي 1. ما محيط المستطيل الأصلي؟



20) A rectangle is divided into 11 smaller rectangles, as shown in the diagram. All 11 rectangles are similar to the original large rectangle. The orientation of the smallest rectangles is the same as the largest. The length of the base of the smallest rectangle is 1. What is the perimeter of the large rectangle?

| (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 20  | 24  | 27  | 30  | 36  |



الجواب: D

بما أن المستطيل الصغير يشابه المستطيل الأصلي،

و  $BC = 9FG$ ،

إذن  $AB = 9EF = 9(1) = 9$

ومنها  $FB = \frac{9-1}{2} = 4$

بالتالي  $\frac{4}{CB} = \frac{CB}{9} \Rightarrow CB^2 = 36 \Rightarrow CB = 6$

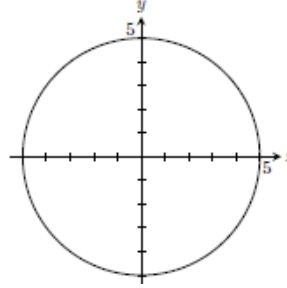
إذن محيط المستطيل الأصلي يساوي

$$2(9 + 6) = 30$$

5 points

مسائل الخمس نقاط

21) لدينا دائرة مركزها  $(0,0)$  وطول نصف قطرها 5. كم نقطة على محيط الدائرة يكون كل من إحداثيها السيني والصادي عددًا صحيحًا؟



21) A circle with center  $(0,0)$  has radius 5. At how many points on the perimeter of the circle are both coordinates integers?

| (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 5   | 8   | 12  | 16  | 20  |

الجواب: C

لتكن  $(x, y)$  نقطة على محيط الدائرة، إذن  $x^2 + y^2 = 25$ .

تكون  $x, y$  أعداد صحيحة في الحالات التالية:

•  $x = \pm 4, y = \pm 3$  إذن  $x^2 = 16, y^2 = 9$  وهذه أربع نقاط  $(-4, -3), (4, -3), (-4, 3), (4, 3)$ .

•  $x = \pm 3, y = \pm 4$  إذن  $x^2 = 9, y^2 = 16$  وهذه أربع نقاط  $(-3, -4), (3, -4), (-3, 4), (3, 4)$ .

•  $x = 0, y = \pm 5$  إذن  $x^2 = 0, y^2 = 25$  وهذه نقطتان  $(0, -5), (0, 5)$ .

•  $x = \pm 5, y = 0$  إذن  $x^2 = 25, y^2 = 0$  وهذه نقطتان  $(-5, 0), (5, 0)$ .

وبالتالي عدد النقاط هو 12.

22) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من ثلاث خانات والتي تساوي خمسة أمثال حاصل ضرب أرقام خاناتها؟

22) How many positive three-digit integers are there that are equal to five times the product of their digits?

| (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |

الجواب: A

ليكن العدد الصحيح الموجب المطلوب هو  $\overline{abc}$  حيث  $a, b, c$  أرقام من صفر إلى 9.

العدد يحقق أن  $\overline{abc} = 5 \cdot a \cdot b \cdot c$ ، إذن

١- جميع الأرقام  $a, b, c$  غير صفرية (وإلا سيكون العدد  $\overline{abc}$  صفر)

٢- جميع الأرقام  $a, b, c$  فردية، ومنها العدد  $\overline{abc}$  فردي (وإلا سيكون  $c = 0$  وبالتالي العدد  $\overline{abc}$  = صفر)

٣- العدد  $c = 5$  لأن العدد  $\overline{abc}$  فردي ومن مضاعفات العدد 5. بالتالي لدينا

$$100a + 10b + 5 = 25 \cdot a \cdot b$$

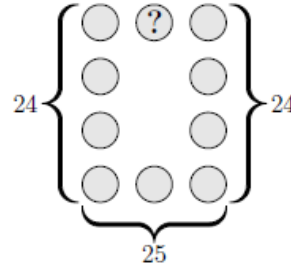
أي سيكون العدد من مضاعفات العدد 25 وعليه فإن عشراته 2 أو 7. لكن  $b$  فردي، إذن  $b = 7$ . أصبح لدينا الآن

$$100a + 75 = 175a \Rightarrow$$

$$75a = 75 \Rightarrow a = 1$$

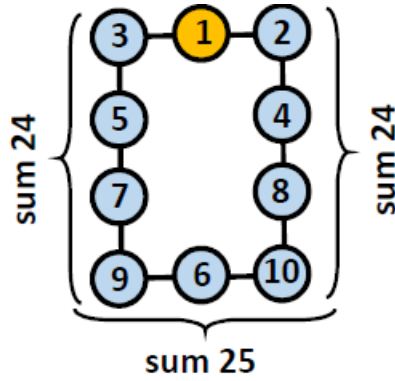
إذن العدد المطلوب هو 175 ولا يوجد غيره.

23) تم وضع كل عدد من الأعداد من 1 إلى 10 في دائرة واحدة من الدوائر في الشكل أدناه. مجموع الأعداد في العمود الأيسر يساوي 24، ومجموع الأعداد في العمود الأيمن يساوي 24، ومجموع الأعداد في الصف السفلي يساوي 25. ما العدد الذي سيحل محل علامة الاستفهام؟



23) The numbers 1 to 10 are placed, once each, in the circles of the figure shown. The sum of the numbers in the left column is 24; the sum of the numbers in the right column is also 24 and the sum of the numbers in the bottom row is 25. What number is in the circle containing the question mark?

| (A) | (B) | (C) | (D) | (E)                                    |
|-----|-----|-----|-----|----------------------------------------|
| 2   | 4   | 5   | 6   | None of the previous<br>لا شيء مما سبق |



الجواب: E

الآن أقصى مجموع ممكن للأعداد في العمودين والصف السفلي (حيث تظهر 9 أعداد) منها عددان مكرران، هو

$$(2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) + (9 + 10) = 73$$

ولكن مجموع الجاميع للعمودين والصف السفلي يساوي

$$24 + 24 + 25 = 73$$

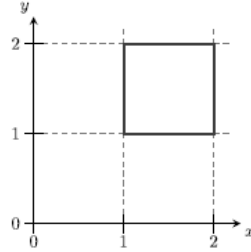
هذا أمر بالغ الأهمية. هذا يعني أنه في هذه الدوائر التسع،

يوجد خيار واحد فقط للأعداد، وهو من 2 إلى 10، مع وضع العددين 9 و 10 داخل الزاويتين

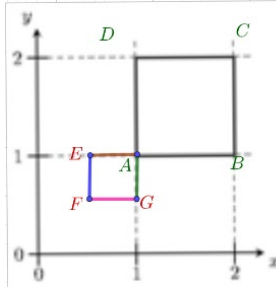
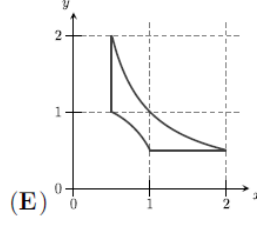
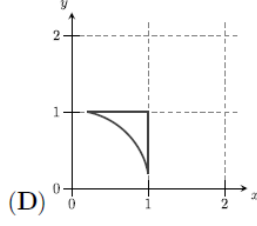
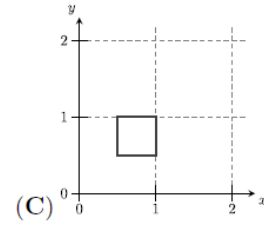
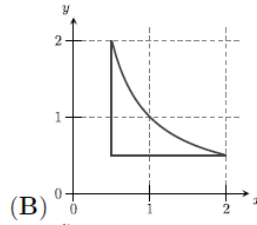
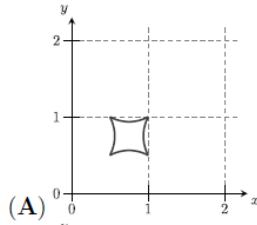
السفليتين للحصول على أقصى مجموع. لذا، فإن العدد المتبقي هو 1، والذي يظهر في الدائرة الصفراء.

يوضح الشكل مثلاً يوضح أن هذا الوضع ممكن.

24) تم رسم مربع في المستوى الإحداثي كما في الشكل. كل نقطة  $(x, y)$  من المربع سيتم نقلها إلى النقطة  $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ . ما الشكل الناتج من هذه العملية؟



24) A square lies in a coordinate system as shown. Each point  $(x, y)$  on the square is moved to  $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ . What will the resulting figure look like?



الجواب: C

إحداثي النقط على القطعة  $AB$  على الصورة  $(a, 1)$  حيث  $1 \leq a \leq 2$ .

إذن صور كل منها بعد النقل سيكون  $(\frac{1}{a}, 1)$  حيث  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{a} \leq 1$ .

إذن صورة القطعة المستقيمة  $AB$  هي القطعة  $\overline{EA}$ ، حيث  $E(\frac{1}{2}, 1)$ .

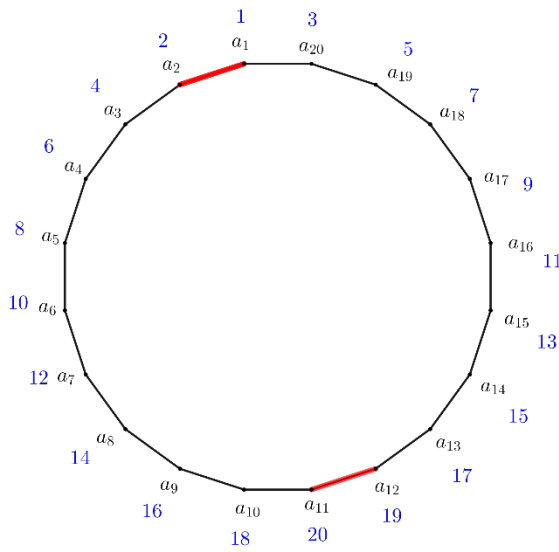
بالمثل صورة كل من  $BC, CD, DA$  هي  $EF, FG, GA$  حيث  $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), G(1, \frac{1}{2})$ .

25) تم ترقيم رؤوس مضلع له 20 ضلع بالأعداد من 1 إلى 20 ، بحيث يكون الفرق بين كل رقمين على رأسين متجاورين هو 1 أو 2 . يتم تلوين الأضلاع التي يكون الفرق بين رقمي طرفيها 1 باللون الأحمر . كم عدد الأضلاع الحمراء؟

25) The vertices of a 20-gon are numbered from 1 to 20 in such a way that the numbers of adjacent vertices differ by either 1 or 2. The sides of the 20-gon whose ends differ by only 1 are colored red. How many red sides are there?

| (A) | (B) | (C) | (D) | (E)                              |
|-----|-----|-----|-----|----------------------------------|
| 1   | 2   | 5   | 10  | there are multiple possibilities |
| 1   | 2   | 5   | 10  | يوجد عدة حلول                    |

الجواب: B



لتكن رؤوس المضلع هي  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$  .

دون فقدان العمومية نضع الرقم 1 عند الرأس

$a_1$  .

سنكون مجبرين على وضع الرقمين 2, 3 عند

الرأسين  $a_2, a_{20}$  .

دون فقدان العمومية مرة أخرى، نضع الرقم 2

عند الرأس  $a_2$  ، والرقم 3 عند الرأس  $a_{20}$  .

ابتداءً من الآن سيكون هناك طريقة واحدة لوضع

الأرقام على الرؤوس .

رقم الرأس  $a_3$  يجب أن يكون 4 ، رقم الرأس  $a_{19}$  يجب أن يكون 5 ، أيضاً رقم الرأس  $a_4$  يجب أن يكون

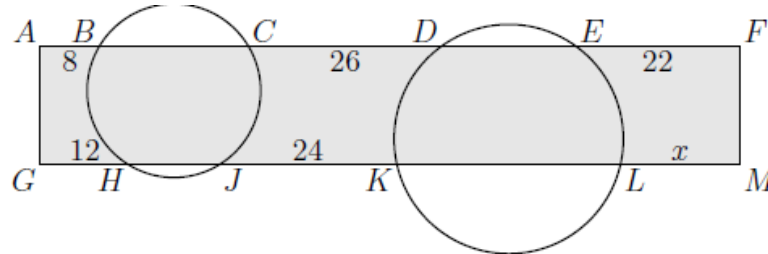
6 ، رقم الرأس  $a_{18}$  يجب أن يكون 7 ، ونستمر بهذه الطريقة لنضع كل الأرقام على الرؤوس حتى نحقق

شرط السؤال ، فنحصل في النهاية على الأرقام على الرؤوس كما في الشكل الموضح .

هناك ضلعان فقط الفرق بين رقمي طرفيها 1 (هما (1, 2), (19, 20) ) .

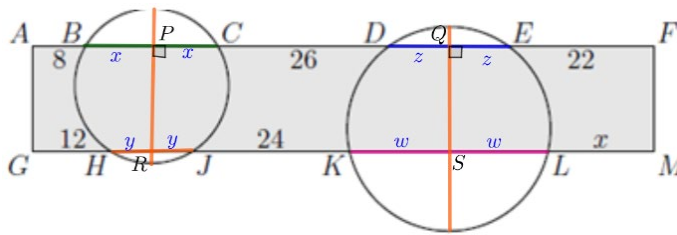
إذن عدد الأضلاع الحمراء هو 2 .

26) تقطع دائرتان أضلاع المستطيل  $AFMG$ ، كما في الشكل. القطع المستقيمة الواقعة خارج الدائرتين لها الأطوال  $AB = 8$ ,  $CD = 26$ ,  $EF = 22$ ,  $GH = 12$ ,  $JK = 24$ . ما طول  $LM$  ؟



26) Two circles cut a rectangle  $AFMG$ , as shown. The line segments outside the circles have length  $AB = 8$ ,  $CD = 26$ ,  $EF = 22$ ,  $GH = 12$  and  $JK = 24$ . What is the length of  $LM$  ?

| (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 14  | 15  | 16  | 17  | 18  |



الجواب: C

نرسم القطر في كل من الدائرتين العموديان على الضلع  $AF$ .

إذن كل منهما ينصف الأوتار

$\overline{BC}$ ,  $\overline{DE}$ ,  $\overline{KL}$ ,  $\overline{HJ}$  كما في الشكل.

بالتالي  $PQSR$  مستطيل، وعليه  $x + 26 + z = w + 24 + y$ . إذن

$$y + w = x + z + 2$$

الشكل  $AFMG$  مستطيل. إذن

$$8 + 2x + 26 + 2z + 22 = 12 + 2y + 24 + 2w + x$$

$$\Rightarrow 20 + 2x + 2z = 2y + 2w + x$$

$$\Rightarrow 10 + 2x + 2y = 2x + 2y + 4 + x$$

$$\Rightarrow x = 16$$

27) ليكن  $N$  عددًا صحيحًا موجبًا. كم عدد الأعداد الصحيحة بين العددين  $\sqrt{N^2 + N + 1}$  و  $\sqrt{9N^2 + N + 1}$  ؟

27) Let  $N$  be a positive integer. How many integers are there between  $\sqrt{N^2 + N + 1}$  and  $\sqrt{9N^2 + N + 1}$  ?

| (A)     | (B)      | (C)  | (D)      | (E)  |
|---------|----------|------|----------|------|
| $N + 1$ | $2N - 1$ | $2N$ | $2N + 1$ | $3N$ |

الجواب: C

$$N = \sqrt{N^2} < \sqrt{N^2 + N + 1} < \sqrt{N^2 + 2N + 1} = N + 1$$

و

$$3N = \sqrt{9N^2} < \sqrt{9N^2 + N + 1} < \sqrt{9N^2 + 6N + 1} = 3N + 1$$

إذن عدد الأعداد الصحيحة المحصورة بينهما يساوي

$$3N - (N + 1) + 1 = 2N$$

(28) في متتابعة عددية، قيمة الحد الأول  $a_1$  بين الصفر والواحد، ولأي عدد صحيح  $n \geq 1$ ،

$$a_{2n+1} = a_2 \cdot a_n - 2 \text{ و } a_{2n} = a_2 \cdot a_n + 1$$

إذا علمت أن  $a_7 = 2$ ، فما قيمة  $a_2$ ؟

28) In a sequence, the first term,  $a_1$  is between 0 and 1. For all  $n \geq 1$ ,  $a_{2n} = a_2 \cdot a_n + 1$  and  $a_{2n+1} = a_2 \cdot a_n - 2$ . Given that  $a_7 = 2$ , what is the value of  $a_2$ ?

| (A)   | (B) | (C) | (D) | (E) |
|-------|-----|-----|-----|-----|
| $a_1$ | 2   | 3   | 4   | 5   |

الجواب: D

من المعطى نستنتج العلاقة بين  $a_2, a_3$ ،

$$2 = a_7 = a_{2 \cdot 3 + 1} = a_2 a_3 - 2 \Rightarrow a_2 a_3 = 4 \text{ --- (1)}$$

نوجد  $a_2$  و  $a_3$  من صيغة الحدود للمتتابعة:

$$a_2 = a_{2 \cdot 1} = a_2 a_1 + 1 \Rightarrow a_2 a_1 = a_2 - 1 \text{ --- (2)}$$

$$a_3 = a_{2 \cdot 1 + 1} = a_2 a_1 - 2 \Rightarrow a_3 = a_2 - 1 - 2 \Rightarrow a_3 = a_2 - 3 \text{ --- (3)}$$

بالتعويض من (3) في العلاقة (1) نجد أن:

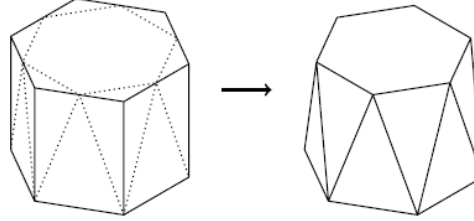
$$a_2(a_2 - 3) = 4 \Rightarrow a_2^2 - 3a_2 - 4 = 0 \Rightarrow (a_2 - 4)(a_2 + 1) = 0 \Rightarrow a_2 = 4 \text{ or } a_2 = -1$$

إذا كان  $a_2 = 1$ ، بالتعويض في (2) نجد أن  $a_1 = 1 - 1 = 0$  وهو مرفوض لأن  $a_1$  عدد موجب.

$$\text{إذن } a_2 = 4 \text{ بالتعويض في (2) نجد أن } a_1 = \frac{3}{4} \text{ وهو مقبول.}$$

إذن  $a_2 = 4$ .

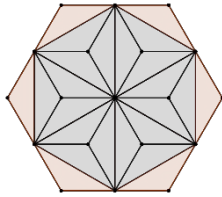
29) تم قطع الزوايا العلوية لمنشور سداسي منتظم، كما في الشكل أدناه. الوجه العلوي أصبح شكل سداسي منتظم أصغر والأوجه الجانبية المستطيلة الستة أصبحت 12 مثلثاً متطابق الضلعين من مقاسين مختلفين. ما هي نسبة حجم الجزء المقطوع من المنشور الأصلي؟



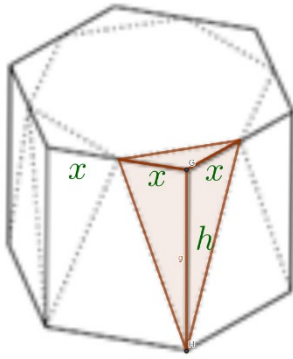
A regular hexagonal prism has its top corners shaved off, as shown. The top face becomes a smaller regular hexagon and the 6 rectangular faces around the middle become 12 isosceles triangles of two different sizes. What fraction of the volume of the original prism has been lost?

| (A)            | (B)           | (C)                   | (D)                   | (E)                   |
|----------------|---------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4\sqrt{3}}$ | $\frac{1}{6\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{6\sqrt{3}}$ |

الجواب: A



لننظر للوجه العلوي للسداسي قبل التقطيع وبعده. من تماثل التقطيع، فإن الشكل السداسي الأصغر تكون رؤوسه هي نقاط المنتصف لأضلاع الشكل السداسي الأصلي. ولكن الشكل السداسي الأصلي يمكن تقسيمه إلى 24 مثلث متطابق الضلعين كلها متطابقة، وزوايا كل منها  $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$ . سيكون 18 منها تغطي الشكل السداسي الأصغر (انظر الشكل المرفق). لذلك فإن المساحة المفقودة في القاعدة تساوي ربع المساحة الأصلية لها. كل ركن تم قطعه عبارة عن هرم قاعدته إحدى المثلثات الموضحة في الشكل المعطى في السؤال. نظراً لأن حجم الهرم هو ثلث حجم المنشور الذي له نفس مساحة القاعدة والارتفاع، والمساحة المفقودة في القاعدة تساوي ربع مساحة قاعدة المنشور، فإن هذا يعني أن  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$  من الحجم قد فقد بشكل عام.



**حل آخر:** بما أن الأجزاء المقطوعة متطابقة سيكون رؤوس الوجه

العلوي للمجسم الجديد عند منتصفات أحرف الوجه العلوي

للسداسي الأصلي. لنفرض الأطوال كما في الشكل أدناه،

مساحة السداسي الأصلي =

$$6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}(2x)^2\right)h = 6\sqrt{3}x^2h$$

الأجزاء المقطوعة الستة كل منها هرم ارتفاعه  $h$  وقاعدته مثلث

متطابق الضلعين كل منهما يساوي نصف طول ضلع السداسي

أي  $x$ ، والزاوية بينهما هي زاوية السداسي المنتظم أي  $120^\circ$

وبالتالي حجم الأجزاء المقطوعة يساوي

$$6\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2 \sin 120\right)h\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2h$$

إذن النسبة المطلوبة تساوي

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2h\right) \div (6\sqrt{3}x^2h) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

30) تمت إقامة مباراة كرة قدم بين فريقي شمال المملكة وجنوب المملكة في ملعب يحتوي على مجموعة مستطيلة من المقاعد للمتفرجين. إذا كان هناك 11 مشجعاً لفريق شمال المملكة في كل صف، و 14 مشجعاً لفريق جنوب المملكة في كل عمود، كما كان هناك 17 مقعداً فارغاً. كم أصغر عدد ممكن من المقاعد في هذا الملعب؟

30) A football match between teams from North KSA and South KSA is played in a stadium that has a rectangular array of seats for the spectators. There are 11 North KSA supporters in each row, and 14 South KSA supporters in each column. This leaves 17 empty seats. What is the smallest possible number of seats in the stadium?

| (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 500 | 660 | 690 | 840 | 994 |

الجواب: B

ليكن عدد الصفوف  $x$ ، وعدد الأعمدة في المدرجات  $y$ .

إذن عدد الكراسي في المدرجات يساوي  $xy$ ، ومن معطيات السؤال أيضاً يساوي  $11x + 14y + 17$ .  
بالتالي:

$$xy = 11x + 14y + 17 \Rightarrow -11x - 14y + xy + 154 = +17 + 154$$

$$\Rightarrow (x - 14)(y - 11) = 171 = 3^2 \times 19$$

وهذه المعادلة لها الحلول  $(x - 14, y - 11) = (1, 171), (3, 57), (9, 19), (57, 3), (171, 1)$

وبالتالي

$$(x, y) = (15, 182), (17, 68), (23, 30), (33, 20), (71, 14), (185, 12)$$

ومنها

$$xy = 2730, 1156, 690, 660, 994, 2220$$

إذن أقل عدد ممكن من الكراسي هو 660، ويحدث عندما عدد الصفوف 33 وعدد الأعمدة 20.